Cuprins

Cuvânt înainte la ediţia a II–a

Această a II–a ediţie, în acelaşi an, este mult aşteptată de noua generaţie de studenţi din anul I. Ea aduce completări importante, fiind adăugat §7.2.6. şi capitolul 8.

În plus, s-au corectat unele erori strecurate la prima ediţie .

Considerăm că în această formă cartea este o sursă mult mai complexă pentru tinerii care doresc să folosească matematica în modelarea ştiinţei şi tehnicii, în particular a proceselor economice.

Autorii

Capitolul 1

Introducere

" A corela privelegi, în concordanţă cu un model logic sau matematic dat, constituie idealul final al stiinţei"

(Monis R. Cohen)

În acest capitol introductiv vom căuta să punem în evidenţă importanţa cunoaşterii matematicii pentru un viitor economist.

1.1 Necesitatea utilizării matematicii în ştiinţele economice

În prezent şi în viitor este clar pentru oricine că o **simplă observaţie** a unui fenomen economic, fără un studiu matematic şi statistic aprofundat, nu mai este satisfăcătoare şi nu poate fi acceptată fără urmări dintre cele mai grave. Folosirea metodelor matematicii în practica economică, de orice nivel, constituie o preocupare cu efecte benefice în rezolvarea problemelor economice actuale.

Cel care este interesat de studiul fenomenelor economice trebuie să aibă o pregătire interdisciplinară.

Studierea globală a aspectelor calitative şi cantitative a unui fenomen economic necesită un anumit volum de **noţiuni; concepte** şi **metode matematice** care considerate ca un ansamblu dau un aşa numit **model matematic** ataşat fenomenului studiat. Modelarea este un atribut al activităţii umane, întâlnit în procesul de cunoaştere a lumii, prin care omul reuşeşte să surprindă **esenţialul** şi să descopere legile după care se guvernează fenomenele naturale, sociale şi psihice.

Utilizarea matematicii în problemele economice, prin utilizarea modelelor matematice, nu este o chestiune simplă. Istoric, ele cochetează de mult timp, dar rezolvarea problemelor ridicate de studiul unui fenomen economic, numărul mare de date cu care lucrează şi volumul mare de calcule necesare, pretindea o tehnică de calcul puternică. Apariţia informaticii şi calculatoarelor rapide au făcut să apară capitole noi în matematică, care să se preocupe de modelarea proceselor economice, ca de exemplu cercetările operaţionale. Aşa cum sublinia profesorul André Brunet "cercetarea operaţională este pregătirea ştiinţifică a deciziilor" ([15]).

În condiţiile actuale este necesar ca la orice nivel de decizie să prelucrăm un număr mare de informaţii şi date care să permită un raţionament logic în alegerea variantei celei mai potrivite.

Un alt motiv care pledează pentru utilizarea matematicii în studiul proceselor economice este şi dorinţa omului de a atinge un anumit **optim**.

Problema alegerii dintr-o mulţime de rezultate posibile pe cel optim, în concordanţă cu un anumit scop, este de o importanţă majoră pentru orice economist, teoretician sau practician. Noţiunea de optim, destul de veche în gândirea economică legată direct de practică, apare într-o nouă lumină prin posibilităţile oferite de matematica contemporană.

Dacă în trecut conţinutul optimului economic funcţiona, cel mai adesea, după principiul **"cu cât mai mult, cu atât mai bine"**, în prezent optimul economic lucrează după principiul **"profit maxim în condiţii date"**.

Utilizarea calculului diferenţial şi integral în economia politică, începând cu sfârşitul secolului al XIX-lea şi începutul secolului al XX-lea, era o necesitate. Aşa s-a născut **economia matematică**, care, treptat s-a impus în cercetările economice.

În conformitate cu aceste preocupări, în economia matematică s-a creat conceptul de **"optim paretian"**, introdus de Vilfredo Pareto. S-au creat noi metode precise de optimizare a activităţii economice, apelându-se la ramurile existente în matematică, dar şi cerând imperios găsirea de noi concepte matematice, care să permită găsirea soluţiilor optime cât mai rapid şi cât mai exact. Aşa au apărut metodele de programare matematică în rezolvarea unor probleme de optimizare a activităţii unor întreprinderi, a unor societăţi de comerţ, turism sau cu preocupări agricole. Problemele puse de practica economică stimulează continuu descoperirea de noi metode matematice. Fără să greşim putem afirma că există o conlucrare benefică, atât pentru economişti, cât şi pentru matematicieni.

Legătura concretă dintre matematică şi economie se stabileşte printr-o traducere în limbaj matematic a noţiunilor şi a relaţiilor ce intervin în fenomenele economice, fapt ce se realizează prin procesul de modelare matematică. Folosirea limbajului matematic în ştiinţele economice oferă posibilitatea formulării necontradictorii a fenomenelor economice şi introducerii rigorii în studiul lor.

1.2 Modelarea matematico-economică

Aplicarea matematicii în economie are două direcţii principale. Prima, care foloseşte metodele matematicii ca instrument menit să sprijine **studiul calitativ** al fenomenelor economice şi a doua, în care matematica este utilizată la analiza **aspectelor cantitative** din practica economică (planificare, prognoză, etc.). Utilitatea matematicii ca instrument ajutător economistului se evidenţiază în plan: logic, empiric şi euristic. Traducând o situaţie economică într-o problemă matematică, îi putem verifica consistenţa, planul empiric şi, în fine, dezvăluirea de relaţii noi. Însă, o astfel de metodă de lucru impune precizarea conceptului de **model**.

Esenţa metodei modelării constă în înlocuirea obiectului sau fenomenului real care ne interesează cu un alt obiect sau fenomen, mai convenabil pentru cercetare. După o astfel de substituire nu se mai studiază obiectul primar ci modelul, iar apoi rezultatul cercetărilor se extinde asupra obiectului sau fenomenului iniţial, cu anumite precauţii.

Termenul de model vine de la diminutivul lui **modus** (măsură în limba latină), care este **modulus**. În limba germană a devenit **model**, iar în secolul al XVI-lea în Franţa se folosea deja termenul **modèle**, provenit din italienescul **modello**. Acelaşi cuvânt a dat în limba engleză termenul **model**. Încă de la început sensul cuvântului model oscila între concret şi abstract. Se pare că primul care a folosit conceptul de model în sensul actual a fost matematicianul italian Beltrami, în anul 1868, când a construit un model euclidian pentru o geometrie neeuclidiană.

În ştiinţă se întâlnesc diferite modele: modelul atomic, modelul cosmologic, modele de creştere economică etc.

Astăzi, metoda modelării este o metodă generală de cercetare şi studiere a unor procese reale cu ajutorul cercetării şi studierii altor procese, care pot fi mai apropiate sau mai depărtate de cele iniţiale. Modelul trebuie să reflecte într-o cât mai mare măsură proprietăţile originalului care sunt legate de scopul cercetării. Atragem însă atenţia că modelul nu este la fel cu originalul.

Modelele ne servesc în viaţa de toate zilele, în ştiinţă, în învăţământ, industrie, proiectare, artă, etc. Multe din modele, cum ar fi hărţile mulajele, machetele, desenele etc., constituie o reproducere materială a unor aspecte ale originalului cercetat. Asemenea **modele materiale** au posibilităţi limitate, multe din ele servind mai mult înţelegerii şi mai puţin cunoaşterii originalelor. Pentru cunoaşterea ştiinţifică s-a trecut la **modele simbolice**, care sunt **modele matematice**. Utilizarea **limbajului matematic** în descrierea unor modele, permit acestora să aibă un înalt grad de abstractizare şi de generalizare, unul şi acelaşi model (ecuaţie, funcţie, sistem, etc.) poate descrie cu mult succes obiecte sau situaţii total diferite. Într-un model matematic se folosesc pentru descriere numai mijloace matematice şi logice, ceea ce conduce la înlăturarea tratărilor subiective. În plus reprezentările matematice nu sunt îngrădite de limite materiale şi nici de traducerea dintr-o disciplină în alta.

În elaborarea unui model matematic ataşat unui proces trebuiesc respectate etapele:

1. Obţinerea modelului descriptiv al procesului, care are subetapele:
   1.1. formularea problemei propuse;
   1.2. analiza structurii informaţionale a fenomenului abordat;
   1.3. discutarea criteriilor posibile care reflectă obiectivele urmărite;
   1.4. stabilirea factorilor esenţiali şi factorilor secundari;
2. Formularea matematică a modelului descriptiv, etapă în care se elaborează modelul matematic;
3. Studierea (cercetarea) modelului, adică rezolvarea practică a problemei pe model. Astăzi, în această etapă de mare folos este calculatorul.

Modelul realizat şi testat trebuie să reflecteze originalul cu destulă precizie. S-ar putea ca modelul să fie bine construit dar să nu dea rezultate satisfăcătoare. El trebuie îmbunătăţit sau abandonat.

Fidelitatea unui model se poate realiza nu numai având grijă să nu pierdem din vedere anumite aspecte ale fenomenului studiat, ci şi prin aparatul matematic folosit.

Fidelitatea faţă de original creşte odată cu perfecţionarea aparatului matematic utilizat. În funcţie de aparatul matematic folosit au apărut modele foarte variate, uneori chiar pentru aceeaşi problemă.

După modelul matematic utilizat se poate da următoarea clasificare a modelelor:

1) **modele aritmetice** (utilizate până în secolul al XVIII-lea)– folosesc numai concepte aritmetice;
2) **modele bazate pe analiza matematică** (utilizate începând cu secolul al XVIII-lea)– folosesc concepte de analiză matematică;
3) **modele liniare** – utilizează concepte de algebră liniară (de exemplu, programarea liniară);
4) **modele de joc** – care iau în considerare şi variabile necontrolabile;
5) **modele de optimizare** – urmăresc optimizarea unei funcţii (numită **funcţia obiectiv**) supusă unor **restricţii**;
6) **modele neliniare** – utilizează restricţii de optim sau funcţii obiectiv neliniare;

7) **modele diferenţiale** – care descriu prin ecuaţii diferenţiale fenomenul (de exemplu, modelul care descrie variaţia producţiei);

8) **modele de tip catrastofic** – utilizate de studiul fenomenelor cu variaţii bruşte;

9) **modele deterministe** – mărimile care intervin sunt perfect determinate;

10) **modele stohastice** – mărimile care intervin sunt aleatorii;

11) **modele de tip statistico-matematice** – mărimile care intervin sunt date statistic;

12) **modele vagi** – mărimile care intervin nu sunt date cu precizie, ci doar vag;

13) **modele discrete** – mărimile care intervin variază discret;

14) **modele continue** – mărimile care intervin variază continuu.

Cu toată diversitatea conceptelor şi rezultatelor matematice, există numeroase fenomene economice pentru care nu s-au elaborat modele pe deplin satisfăcătoare.

1.3 Câteva exemple de modele matematico–economice

În acest paragraf prezentăm câteva din cele mai cunoscute modele matematico–economice.

1.3.1 Optimizarea producţiei unei întreprinderi

Să considerăm o întreprindere care îşi desfăşoară activitatea de producţie în următoarele condiţii:

i) în întreprindere se desfăşoară n activităţi A_i, $i = \overline{1, n}$;

ii) există m factori disponibili F_j, $j = \overline{1, m}$;

iii) se cunosc coeficienţii tehnici de utilizare a celor m factori în cele n activităţi.

Vom încerca să obţinem descrierea matematică a activităţii de producţie.

Pentru realizarea modelării acestui program de producţie să notăm cu x_i nivelul activităţii A_i, $i = \overline{1, n}$, şi cu b_i volumul (cantitatea) disponibil de factorul F_j, $j = \overline{1, m}$ şi a_{ij} factorul de proporţionalitate al consumului F_i

pentru activitatea A_j.

Acum putem scrie **restricţiile**:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m
\end{array}
\right. \tag{1.1}
$$

Restricţiile (1.1) reprezintă condiţiile în care întreprinderea poate să-şi desfăşoare activitatea. Ele se pot scrie şi sub forma matricială. În acest scop facem notaţiile: $A = (a_{ij})$ – matricea coeficienţilor tehnici; $x = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (t – transpus) – vectorul coloană al nivelului producţiei; $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – vectorii coloană din matricea A; C_0 – vectorul coloană al volumelor disponibile. Acum condiţiile (1.1) se pot scrie sub forma

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \leq C_0$$

sau

$$Ax \leq C_0.$$

Până aici am urmărit descrierea tehnologiei producţiei. Dar orice proces de producţie mai urmăreşte şi o **motivaţie economică**, de exemplu să se realizeze o eficienţă maximă. Un astfel de criteriu de eficienţă este dat de maximizarea profitului. Practic, finalul acestui proces este optimizarea unei anumite funcţii, care de fapt realizează optimizarea funcţionării unui proces economic.

1.3.2 Modele de gospodărire

Orice firmă doreşte fie să-şi maximizeze veniturile, fie să-şi minimizeze cheltuielile, iar consumatorii să-şi distribuie salariile aşa încât să-şi satisfacă la maximum nevoile vieţii. De fapt, orice situaţie de gospodărire impune o repartizare optimă a unor resurse disponibile limitate între diferite activităţi care se desfăşoară pentru realizarea unui anumit scop.

Acest tip de procese economice poartă numele de **probleme de gospodărire**.

Un model pentru o problemă de gospodărire se compune din două părţi: prima referitoare la restricţii şi o a doua care descrie criteriul sau obiectivul activităţii de derulat. Într-un astfel de model se cere găsirea valorilor unor variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru care o funcţie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este optimă şi care sunt supuse unor restricţii de forma:

$$
\begin{array}{l}
F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0, \\
F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0,
\end{array}
$$

unde semnul "$\leq$" poate fi şi "$\geq$".

Cum orice model de gospodărire are menirea de a stabili un program de acţiune, el a căpătat denumirea de **model de programare**. Domeniile de aplicare a modelelor de programare se referă la un număr mare de probleme de planificare din industrie, transporturi, agricultură, ş.a. Unele din ele au o foarte mare circulaţie şi numeroase aplicaţii fapt ce le-au făcut celebre. Dăm un astfel de exemplu în subparagraful următor.

1.3.3 Problema dietei (nutriţiei)

Una dintre problemele celebre de gospodărire este problema alimentării cât mai ieftine şi realizarea unor cerinţe de alimentaţie conform unui scop propus.

O alimentaţie se consideră bună dacă se oferă anumite substanţe în cantităţi minimale precizate. Evident că aceste substanţe se găsesc în diferite alimente cu preţuri cunoscute. Se cere să se stabilească o dietă (raţie) care să fie corespunzătoare şi totodată cât mai ieftină. Substanţele care intră într-o dietă se numesc **substanţe nutritive** sau **principii nutritive**.

Vom obţine, în continuare, modelul matematico-economic pentru problema dietei. Fie $S_1, S_2, \ldots, S_m$ substanţele nutritive care trebuie să intre în compunerea dietei în cantităţile minimale $b_1, b_2, \ldots, b_m$ şi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alimentele de care dispunem cu preţul corespunzător pe unitate $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Notăm cu a_{ij} numărul de unităţi din substanţa S_i, $i = \overline{1, m}$, se găsesc într-o unitate din alimentul A_j, $j = \overline{1, n}$. Se cere să se afle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numărul de unităţi din alimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aşa încât să se obţină o raţie acceptabilă la un preţ cât de mic. De obicei datele problemei se prezintă într-un tabel de forma:

Alimente / Substanţa	A_1	A_2	$\ldots$	A_j	$\ldots$	A_n	Minim necesar din S_i
S_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
S_i	a_{i1}	a_{i2}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{in}	b_i
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
S_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mj}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
Preţ alimente	c_1	c_2	$\ldots$	c_j	$\ldots$	c_n	
Unităţi de consum	x_1	x_2	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	

Cantitatea din substanţa S_i care se realizează este $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$, care din cerinţa problemei trebuie să fie $\geq b_i$, $i = \overline{1, m}$. Ajungem astfel la condiţiile (restricţiile):

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

Natura datelor cu care lucrăm impun şi condiţiile de nenegativitate:

$$\text{(1.3)} \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Funcţia obiectiv care exprimă costul unei raţii este dată de:

$$\text{(1.4)} \qquad f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Problema dietei cere să determinăm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aşa încât f să fie minimă. O astfel de dietă se numeşte **optimă**. Orice dietă care satisface restricţiile (1.2) şi (1.3) se numeşte **admisibilă**.

Modelul dietei poate fi folosit şi în alte situaţii, ca de exemplu: problema furajării raţionale (în zootehnie), chestiunea amestecului optim (în amestecuri de benzină sau uleiuri auto, în realizarea unor sortimente de băuturi sau îngheţată), ş.a.

Pentru alte modele matematico-economice se pot consulta lucrările [14], [9], [17].

1.4 Probleme

1. O întreprindere dispune de m resurse $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Notăm cu $b_1, b_2, \ldots, b_m$ numărul de unităţi disponibile din resursele $R_1, R_2, \ldots, R_m$, respectiv. În procesul de producţie se realizează produsele finite $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Cunoscându-se consumurile a_{ij} din resurse R_i, $i = \overline{1,m}$ pentru o unitate finită din produsul P_j, $j = \overline{1,n}$ precum şi valoarea câştigurilor pe unitate realizate prin valorificarea produselor finite pe care le notăm cu $c_1, c_2, \ldots, c_n$, se cere: cât trebuie realizat din fiecare produs ca în limita resurselor disponibile să se obţină o producţie care să aducă un beneficiu maxim (**problema sortimentului optim**).

Să se scrie modelul matematico-economic pentru această problemă economică.

2. O marfă (produs) se află în depozitele $D_1, D_2, \ldots, D_m$ cu capacităţile $d_1, d_2, \ldots, d_m$ şi trebuie transportată toată la centrele de consum $C_1, C_2, \ldots, C_n$ cu capacităţile $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Cunoscând costul transportului pe unitate de marfă D_i, $i = \overline{1,m}$, la C_j, $j = \overline{1,n}$ notat cu c_{ij}, se cere să se facă o astfel de repartitie a mărfii încât costul total al transportului să fie minim (**problema**

transporturilor).

Să se scrie modelul matematico-economic pentru problema transporturilor.

3. La un birou sunt de rezolvat m sarcini $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Acestea pot fi soluţionate de n funcţionari $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Avem condiţia potrivit căreia fiecare sarcină va fi efectuată (dată spre rezolvare) doar unui funcţionar şi fiecare funcţionar să nu primească decât o sarcină. De asemenea, se mai cunoaşte că afectarea sarcinii S_i funcţionarului F_j conduce la rentabilitatea r_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Se cere să se facă o astfel de afectare a sarcinilor aşa încât rentabilitatea totală să fie maximă (**problema afectării**).

Să se scrie modelul matematico-economic pentru această problemă.

Capitolul 2

Noţiuni preliminare

"Repetitio est mater studiorum. (Repetiţia este mama învăţăturii).

Acest capitol este dedicat unor noţiuni şi teorii matematice care în mare parte au fost studiate la liceu, fiind însă completate cu chestiuni noi, deseori utile în studierea problemelor economice.

2.1 Elemente de logică matematică

Logica matematică studiază procesele de raţionament utilizând mijloace matematice. De obicei raţionamentele se fac cu propoziţii (afirmaţii) de natură absolut arbitrară, despre care nu presupunem altceva decât că fiecare din ele este sau **adevărată**, sau **falsă**.

De exemplu, astfel de propoziţii sunt: "ninge"; "scriu pe caiet"; "calul este animal"; "6 este număr par"; "acest produs este defect"; "mediatoarele unui triunghi sunt concurente"; "2 divide pe 12 şi 3 divide pe 12", etc.

Notăm propoziţiile la care ne referim cu litere mici: $p, q, r, \ldots, x, y, z, \ldots$, eventual utilizăm şi indici. Vom nota cu 1 sau a faptul că o propoziţie are valoarea de "adevărat", iar cu 0 sau f faptul că ea are valoarea de "fals".

Propoziţiile se mai numesc şi **variabile logice** sau **propoziţii elementare**. Pornind de la aceste propoziţii, cu ajutorul aşa-numiţilor **functori logici** sau **conectivi logici**, se pot obţine propoziţii noi, numite **propoziţii (formule) compuse**. Cele mai importante conective logice sunt: "non" ("nu"); "şi"; "sau"; "dacă ... atunci"; "dacă şi numai dacă". Acum, să vedem cum se definesc propoziţiile compuse cu ajutorul acestor functori.

Definiţia 2.1.1 *Negaţia unei propoziţii p este propoziţia "non p", care se notează, de asemenea, cu $\neg p$ sau $\overline{p}$. Această propoziţie este falsă dacă p este adevărată şi adevărată când p este falsă.*

Definiţia 2.1.2 *Conjucţia propoziţiilor p şi q este propoziţia "p şi q", care se notează, de asemenea, cu* $p \wedge q$ *sau* $p\&q$ *sau* pq. *Această propoziţie este adevărată când ambele propoziţii p, q sunt adevărate, şi este falsă în restul cazurilor.*

Definiţia 2.1.3 *Disjuncţia propoziţiilor p, q este propoziţia "p sau q", care se notează, de asemenea, cu "*$p \vee q$*". Această propoziţie este falsă, când ambele propoziţii p, q sunt false, şi este adevărată în celelalte situaţii.*

Definiţia 2.1.4 *Implicaţia propoziţiilor p, q este propoziţie "dacă p, atunci q", care se notează şi prin* $p \Rightarrow q$. *Această propoziţie este falsă numai dacă p este adevărată şi q este falsă, în celelalte cazuri ea este adevărată.*

Definiţia 2.1.5 *Echivalenta propoziţiilor p, q este propoziţie "p dacă şi numai dacă q", care se notează şi prin* $p \Leftrightarrow q$. *Această propoziţie este adevărată dacă p şi q sunt simultan adevărate sau simultan false, în celelalte cazuri propoziţia este falsă.*

Definiţiile 2.1.1 – 2.1.5 pot fi date condensat ca în Tabela 1, reprezentând valorile noilor propoziţii în funcţie de valorile de adevăr a propoziţiilor iniţiale. Aceste reprezentări se numesc **tabelele de adevăr** corespunzătoare propoziţiilor compuse.

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela 1

Folosind propoziţiile obţinute cu ajutorul conectivelor logice şi parantezelor putem forma noi propoziţii (formale) compuse, cum ar fi: $(p \vee q) \wedge r$. $(p \vee q \vee \overline{p}) \wedge ((p \vee q) \wedge r)$, $(\overline{p \vee q}) \wedge p \wedge (q \vee \overline{r})$, etc. În cazul unor astfel de propoziţii se aplică următoarele reguli:

1. expresiile înscrise în paranteze se vor evalua din interior spre exterior;

2. în cazul suprimării unor paranteze, atunci se evaluează în următoarea ordine: negaţie; conjuncţie şi disjuncţie; implicaţia şi echivalenţa.

Valorile unei propoziţii compuse se pot afla cu ajutorul tabelelor de adevăr.

Definiţia 2.1.6 *O formulă logică se numeşte* **tautologie** *sau* **identitate** *dacă este adevărată pentru toate valorile logice date propoziţiilor variabile care apar în scrierea sa.*

Definiţia 2.1.7 *O formulă logică se numeşte* **contradicţie***, dacă este falsă pentru toate valorile logice ale propoziţiilor care apar în scrierea sa.*

Definiţia 2.1.8 *O formulă logică se numeşte* **realizabilă** *dacă există cel puţin un sistem de valori logice ale propoziţiilor variabile care apar în scrierea sa aşa încât această formulă să fie adevărată.*

Problema decidabilităţii constă în a stabili dacă o formulă logică este tautologie, contradicţie sau realizabilă.

Cea mai simplă metodă de rezolvare a problemei decidabilităţii este **metoda tabelelor de adevăr**.

Exemplul 2.1.1. Să cercetăm natura formulei logice

$$f(p,q) = (p \vee q) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q}).$$

Avem tabela de adevăr

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$f(p,q)$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

de unde rezultă că formula logică dată este o contradicţie.

Exemplul 2.2.2. Să cercetăm natura formulei

$$f(p,q) = p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p.$$

Avem tabela de adevăr

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$f(p,q)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

de unde deducem că formula dată este o tautologie.

Teorema 2.1.1 *Oricare ar fi propoziţiile p, q, r următoarele formule logice sunt tautologii:*

1. $p \Rightarrow p$
2. $p \vee p \Leftrightarrow p$
3. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
4. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
5. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
6. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
7. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
8. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
9. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
10. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
11. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
12. $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$
13. $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
14. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
15. $p \vee \overline{p} \Leftrightarrow 1$
16. $\overline{p \vee \overline{p}} \Leftrightarrow 0$
17. $p \Rightarrow p \vee q$
18. $p \wedge q \Rightarrow p$
19. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$
20. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
21. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
22. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \Rightarrow q \wedge r$
23. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

Demonstraţia Teoremei 2.1.1 se face uşor folosind metoda tabelelor de adevăr.

Comentarii. 1. Proprietatea 1) din Teorema 2.1.1 se numeşte **principiul identităţii**. Proprietăţile 2) şi 3) poartă numele de idempotenţa disjuncţiei, respectiv conjuncţiei, iar 4) şi 5) se numesc **comutativitatea** disjuncţiei, respectiv conjuncţiei. Formulele 6) şi 7) stabilesc proprietatea de **asociativitate** a disjuncţiei, respectiv conjuncţiei, iar 8) şi 9) redau **distributivitatea** conjuncţiei faţă de disjuncţie şi a disjuncţiei faţă de conjuncţie. Formulele 10) şi 11) poartă numele de **legile de absorbţie**, iar 13) şi 14) se numesc legile lui De Morgan. Formula 15) ne arată că una din propoziţiile p sau $\overline{p}$ este cu necesitate adevărată şi de aceea se numeşte **principiul terţului exclus**, iar 16) ne arată că o propoziţie p şi negaţia ei nu pot fi simultan adevărate, purtând numele de **principiul contradicţiei**.

Formula 20) poartă numele de legea contrapoziţiei. Ea stă la baza demonstrării prin **reducere la absurd**.

2. În propoziţia compusă "$p \Rightarrow q$", p se numeşte premisă (ipoteză), q concluzie, iar enunţul "$p \Rightarrow q$" teoremă. Propoziţia "$q \Rightarrow p$" poartă numele de reciproca teoremei "$p \Rightarrow q$". Legea logică 20) din teorema 2.1.1 afirmă că teorema directă este echivalentă cu contrara reciprocei.

În propoziţia "$p \Rightarrow q$" se mai spune că p este condiţia suficientă pentru q, iar q este condiţie necesară pentru p.

3. Partea din logica matematică care se ocupă cu studiul propoziţiilor determinate ca mai sus se numeşte **logica propoziţiilor** sau **calculul propoziţiilor**.

Logica propoziţiilor se aplică în domeniul economic în probleme de conducerea sistemelor economice (v.[18]).

În logica matematică apar şi propoziţii nedeterminate, care depind de o variabilă sau mai multe. De exemplu: "x este om"; "x este mama lui y"; "$x^2 + y^2 = 1$, x, y numere reale"; "$x^2 + y^2 = z^2$, x, y, z numere întregi". Când înlocuim variabilele cu elemente concrete, propoziţia respectivă se transformă într-o propoziţie bine determinată, de tipul celor studiate mai sus, şi care poate fi adevărată sau falsă. Pentru exemplele considerate avem: "Eminescu este om"; "$1^2 + 0^2 = 1$"; "$1^2 + 2^2 = 1^2$"; "$3^2 + 4^2 = 5^2$"; "$3^2 + 5^2 = 6^2$"; etc.

Aceste propoziţii mai generale (nedeterminate) se numesc **funcţii propoziţionale**. Pentru fiecare sistem de valori atribuite variabilelor unei funcţii propoziţionale îi corespunde o propoziţie determinată din logica propoziţiilor. Funcţiile propoziţionale mai sunt numite şi **predicate**. Un predicat de forma $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ se numeşte **n–ar**. Partea din logica matematică care se ocupă cu studiul funcţiilor propoziţionale poartă numele de **logica predicatelor** sau **calculul predicatelor**.

Variabilele unui predicat pot fi supuse unui **proces de cuantificare** utilizând cuantificatorii $\forall$ – oricare (universal) şi $\exists$ – există (existenţial). Scrierea

$(\forall x)\ p(x,y,z)$ se citeşte "oricare ar fi x, $p(x,y,z)$", iar $(\exists y)\ p(x,y,z)$ se citeşte "există y, $p(x,y,z)$". Dacă variabila unui predicat este însoţită de un cuantificator, atunci se spune că este **legată**, iar, în caz contrar, se spune că este **liberă**.

Teorema 2.1.2 *Sunt adevărate următoarele proprietăţi:*

1. $\overline{(\forall x)p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{p(x)}$;
2. $\overline{(\exists x)p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\overline{p(x)}$;
3. $(\forall x)p(x) \Rightarrow (\exists x)p(x)$;
4. $(\forall x)(\forall y)p(x,y,) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)p(x,y)$;
5. $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)p(x,y)$;
6. $(\exists x)(\forall y)p(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$.

Demonstraţie. Echivalenţă 1) exprimă adevărul evident; afirmaţia "că nu orice element x satisface $p(x)$" este adevărată dacă şi numai dacă **există** un element x care satisface $\overline{p(x)}$. 2) rezultă din 1) înlocuind $p(x)$ cu $\overline{p(x)}$. Propoziţiile 3)–5) se justifică imediat.

Pentru a justifica 6) să considerăm x_0 un element astfel încât $(\forall y)p(x_0,y)$. Înseamnă că $(\forall y)p(x,y)$ are loc sigur pentru x_0. Reciproca implicaţiei 6) nu este adevărată. De exemplu, să considerăm predicatul $p(x,y)$ definit prin "$x+y=0$, x, y numere întregi". Atunci propoziţia "$(\forall y)(\exists x)\ x+y=0$" este adevărată (ea ne spune că orice număr întreg y are un opus la adunare) în timp ce propoziţia "$(\exists x)(\forall y)x+y=0$ este falsă deoarece nu există un număr x care adunat cu orice număr y să dea 0".

Comentariu. Calculul predicatelor are un rol însemnat în realizarea raţionamentelor matematice corecte.

2.2 Elemente de teoria mulţimilor

Noţiunea de mulţime este considerată ca o noţiune primară.

Intuitiv, după Georg Cantor – creatorul teoriei mulţimilor, o mulţime este "o colecţie de obiecte (elementele mulţimii) de natură oarecare, bine determinate şi distincte". În general, notăm mulţimile cu litere mari, iar elementele cu litere mici. Dacă A este o mulţime şi a un element al lui A, vom scrie $a \in A$ şi vom citi "a aparţine lui A". Semnul "$\in$" este semnul **relaţiei de apartenenţă**. Relaţia de apartenenţă este un predicat binar. Negaţia propoziţiei $a \in A$ o vom scrie $a \notin A$ şi vom citi: "a nu aparţine mulţimii A".

Definiţia 2.2.1 *Spunem că mulţimile A şi B sunt egale, scriind $A = B$, dacă ele sunt formate din aceleaşi elemente.*

Propoziţia 2.2.1 *Relaţia de egalitate a mulţimilor are proprietăţile:*

1. *este reflexivă, adică $A = A$, pentru orice mulţime A;*

2. *este simetrică, adică $A = B \Rightarrow B = A$, oricare ar fi mulţimile A şi B;*

3. *este tranzitivă, adică $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$, oricare ar fi mulţimile A, B şi C.*

Demonstraţia celor trei proprietăţi se face utilizâd Definiţia 2.2.1.

O mulţime se poate da, fie prin enumerarea elementelor sale scrise între două acolade, fie printr-o **proprietate caracteristică**, când scriem $\{x|x$ are proprietatea $P(x)\}$.

Definiţia 2.2.2 *Mulţimea $\Phi = \{x|x \neq x\}$ se numeşte* **mulţimea vidă** *sau "mulţimea care nu are nici un element"*

Definiţia 2.2.3 *Spunem că mulţimea A este inclusă în mulţimea B şi scriem $A \subseteq B$ dacă oricare element al mulţimii A este un element al mulţimii B.*

Semnul "$\subseteq$" reprezintă semnul **relaţiei de incluziune**.

Dacă $A \subseteq B$ se mai spune că A este o **submulţime** a lui B sau că A este o **parte** a lui B. Mulţimea $\mathcal{P}(A) = \{X|X \subseteq A\}$ se numeşte **mulţimea părţilor** lui A. Evident că $\Phi \in \mathcal{P}(A)$ şi $A = \mathcal{P}(A)$.

Propoziţia 2.2.2 *Relaţia de incluziune are proprietăţile:*

1. *reflexivitate, adică $A \subseteq A$, pentru orice mulţime A;*

2. *antisimetrie, adică $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$, oricare ar fi mulţimile A şi B;*

3. *tranzitivitate, adică $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$, oricare ar fi mulţimile A şi B.*

Demonstraţia se face folosind Definiţia 2.2.3.

Definiţia 2.2.4 *Spunem că mulţimea A este* **scrict inclusă** *în mulţimea B, scriem $A \subset B$, dacă $A \subseteq B$ şi $A \neq B$.*

Definiţia 2.2.5 *Fiind date mulţimile A şi B, numim* **reuniunea** *lor, notată prin $A \cup B$, mulţimea elementelor ce aparţin cel puţin uneia din mulţimile A sau B.*

Se observă că $A \cup B$ este predicatul "$x \in A$ sau $x \in B$".

Definiţia 2.2.6 *Fiind date mulţimile A şi B, numim* **intersecţia** *lor, notată prin $A \cap B$, mulţimea tuturor elementelor care aparţin atât lui A, cât şi lui B.*

Definiţia 2.2.7 *Fiind date mulţimile A şi B, numim diferenţa lor, notată prin $A - B$, mulţimea tuturor elementelor care aparţin lui A şi nu aparţin lui B.*

Propoziţia 2.2.3 *Sunt valabile următoarele proprietăţi:*

1. $A \cup A = A$ *(idempotenţa reuniunii);*
2. $A \cap A = A$ *(idempotenţa intersecţiei);*
3. $A \cup B = B \cup A$ *(comutativitatea reuniunii);*
4. $A \cap B = B \cap A$ *(comutativitatea intersecţiei);*
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(asociativitatea reuniunii);*
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asociativitatea intersecţiei);*
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distribuitivitatea intersecţiei faţă de reuniune);*
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivitatea reuniunii faţă de intersecţie);*
9. $A \cup (A \cap B) = A$ *(legile absorbţiei);*
10. $A \cap (A \cup B) = A$
11. $A \subseteq B$, $C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$ *(reuniunea este* **izotonă** *(crescătoare));*
12. $A \subseteq B$, $C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$ *(intersecţia este izotonă (crescătoare));*
13. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ *(relaţiile lui De Morgan);*
14. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Demonstraţiile celor 14 proprietăţi le lăsăm în seama cititorului.

Dacă $A \subseteq E$, atunci $E - A$ se numeşte **complementara** lui A faţă de E şi se notează prin $C_E(A)$.

Relaţiile 13) şi 14) ale lui De Morgan pentru $A \subseteq E$ şi $B \subseteq E$ devin:

$$C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$$

respectiv

$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B).$$

Definiţia 2.2.8 *Mulţimile A şi B se numesc* **disjuncte** *dacă $A \cap B = \Phi$.*

Definiţia 2.2.9 *Mulţimea $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$ se numeşte diferenţa simetrică a mulţimilor A şi B.*

Se verifică uşor că diferenţa simetrică este comutativă, asociativă şi admite mulţimea vidă Φ ca element neutru.

Definiţia 2.2.10 *Se numeşte* **produsul cartezian** *al mulţimilor A şi B, notat cu $A \times B$, mulţimea perechilor ordonate (a, b), unde $a \in A$ şi $b \in B$.*

Noţiunea de **pereche ordonată** o acceptăm ca un cuplu de obiecte cu o ordine fixată între aceste obiecte, adică vom admite că

$$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \text{ şi } b = y.$$

Într-o pereche (a, b) elementul a va fi numită prima componentă, iar elementul b va fi numită **a doua componentă**.

Prin inducţie matematică putem defini noţiunea de n–uplu format din obiectele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ca fiind mulţimea $((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$, pe care o notăm prin $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Tot prin inducţie matematică se arată că $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$.

Propoziţia 2.2.4 *Produsul cartezian este asociativ, izoton şi distributiv faţă de reuniune, intersecţie, diferenţă şi diferenţa simetrică.*

Demonstraţia o lăsăm în seama cititorului.

Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt n mulţimi, $n \geq 2$, atunci

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

este produsul cartezian al mulţimilor $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Dacă $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, atunci $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ ori}$ se notează prin A^n.

Comentarii. 1. Dacă mulţimea A are n elemente, $n \in \mathbb{N}$, atunci submulţimile lui A de k elemente, $0 \leq k \leq n$ se numesc **combinări de** n **obiecte luate câte** k. Numărul combinărilor de n obiecte luate câte k, $0 \leq k \leq n$, se notează prin simbolul C_n^k (sau $\binom{n}{k}$) şi avem

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & , \text{ dacă } 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \text{ dacă } k > n. \end{cases}$$

Numărul tuturor submulţimilor mulţimii A de n elemente, adică numărul elementelor lui $\mathcal{P}(A)$, este

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

2. Numărul elementelor unei mulţimi finite se numeşte cardinalul lui E şi se notează prin $|A|$ sau card A. Avem $|\Phi| = 0$ şi card $\{x\} = 1$.

Se verifică formula

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

iar prin inducţie matematică se demonstrează formula

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|,$$

numită şi **principiul excluderii–includerii**.

3. În domeniul economic mulţimile se utilizează în probleme de acoperire şi de numărare (v [19]).

2.3 Relaţii binare

Noţiunea de **relaţie binară** sau **corespondenţă** intre două mulţimi este una dintre noţiunile fundamentale ale matematicii, cu aplicaţii în toate ştiinţele teoretice şi practice. În esenţă, studiul relaţiilor binare revine la precizarea proprietăţilor perechilor de elemente ce se pot forma cu elementele a două mulţimi.

Definiţia 2.3.1 *Se numeşte relaţie binară sau corespondenţă între mulţimile A şi B tripletul $\mathcal{R} = (A, G, B)$, unde G este o submulţime a produsului cartezian $A \times B$.*

Mulţimea G se numeşte graficul relaţiei binare, A se numeşte **domeniul de definiţie** *sau* **mulţimea de pornire***, iar B* **codomeniul** *sau* **mulţimea de sosire***.*

Faptul că pentru elementele $x \in A$ şi $y \in B$ avem $(x, y) \in G$ se notează cu $x\mathcal{R}y$ şi se citeşte "x este în relaţie $\mathcal{R}$ cu y". Faptul că elementul x nu este în relaţie $\mathcal{R}$ cu y se notează prin $x\overline{\mathcal{R}}y$. De obicei, o relaţie binară se dă prin indicarea mulţimilor A şi B şi a unei proprietăţi caracteristice pentru perechile de elemente (x, y) care sunt în acea relaţie.

Dacă $A = B$, o relaţie binară $\mathcal{R} = (A, G, A)$, cu $G \subseteq A \times A$ se numeşte **relaţie binară în mulţimea** A. Faptul că mulţimea A este înzestrată cu relaţia $\mathcal{R}$ se mai notează prin $(A, \mathcal{R})$.

Exemple. 2.3.1. Relaţia de incluziune "$\subseteq$" în mulţimea $\mathcal{P}(A)$ a părţilor lui A.

2.3.2. Relaţia de "$\leq$" în mulţimea numerelor reale.
2.3.3. Relaţia de "$<$" în mulţimea numerelor reale.
2.3.4. Relaţia de paralelism în mulţimea $\mathcal{D}$ a dreptelor din plan.
2.3.5. Relaţia de egalitate în mulţimea numerelor reale.

Observaţia 2.3.1 *Se pot defini relaţii şi în produsul cartezian* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, *numite* **relaţii n-are**, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Definiţia 2.3.2 *O relaţie binară* $\mathcal{R}$ *într-o mulţime* A *se numeşte reflexivă dacă pentru orice* $a \in A$ *avem* $a\mathcal{R}a$, *adică este în relaţie cu el însuşi.*

Relaţiile din exemplele 2.3.1, 2.3.2 şi 2.3.4 sunt reflexive.

Definiţia 2.3.3 *O relaţie binară* $\mathcal{R}$ *într-o mulţime* A *se numeşte simetrică dacă din faptul că este verificată pentru perechea* (x, y), $x, y \in A$ *rezultă că este verificată şi pentru perechea* (y, x).

Relaţiile din exemplele 2.3.4 şi 2.3.5 sunt simetrice.

Definiţia 2.3.4 *O relaţie binară* $\mathcal{R}$ *în mulţimea* A *se numeşte antisimetrică dacă din* $x\mathcal{R}y$ *şi* $y\mathcal{R}x$ *rezultă* $x = y$.

Relaţiile din exemplele 2.3.1 şi 2.3.2 sunt antisimetrice.

Definiţia 2.3.5 *O relaţie binară* $\mathcal{R}$ *în mulţimea* A *se numeşte tranzitivă dacă din* $x\mathcal{R}y$ *şi* $y\mathcal{R}z$ *rezulta* $x\mathcal{R}z$, *oricare ar fi* $x, y, z \in A$.

Relaţiile din exemplele 2.3.1–2.3.5 sunt tranzitive.

Definiţia 2.3.6 *O relaţie binară* $\mathcal{R}$ *în mulţimea* A *se numeşte* **relaţie de echivalenţă** *în mulţimea* A *dacă este simultan reflexivă, simetrică şi tranzitivă.*

Din exemplele considerate relaţiile 2.3.4 şi 2.3.5 sunt relaţii de echivalenţă.

Definiţia 2.3.7 *Fie* $\mathcal{R}$ *o relaţie de echivalenţă în mulţimea* A *şi* a *un element din* A. *Submulţimea* $\widehat{a}$ *a elementelor din* A *care sunt în relaţie* $\mathcal{R}$ *cu* a *se numeşte* **clasa de echivalenţă a elementului** a **faţă de relaţia** $\mathcal{R}$. *Adică, avem* $\widehat{a} = \{x \in A | x\mathcal{R}a\}$. *Orice element al lui* $\widehat{a}$ *se numeşte reprezentant al acestei clase.*

Definiţia 2.3.8 *Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă faţă de relaţia de echivalenţă* $\mathcal{R}$ *în* A *se numeşte* **mulţimea factor (cât) a mulţimii** A **faţă de relaţia** $\mathcal{R}$ *şi se notează* $A/\mathcal{R}$.

Este evident că $A/\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Definiţia 2.3.9 *O submulţime a lui A care conţine câte un singur element din fiecare clasă de echivalenţă se numeşte* **sistem de reprezentanţi**.

Propoziţia 2.3.1 *Fie $\mathcal{R}$ o relaţie de echivalenţă în A. Atunci sunt adevărate afirmaţiile:*

i) $a \in \widehat{a}$, *oricare ar fi* $a \in A$;

ii) $\widehat{a} = \widehat{b}$ *dacă şi numai dacă* $a\mathcal{R}b$;

iii) $\widehat{a} \cap \widehat{b} = \Phi$ *dacă şi numai dacă* $a\overline{\mathcal{R}}b$ *(a nu este în relaţie $\mathcal{R}$ cu b)*;

iv) $A = \bigsqcup\limits_{B \in A/\mathcal{R}} B$.

Demonstraţie. **i)** Din reflexivitatea relaţiei $\mathcal{R}$ avem $x\mathcal{R}x$, de unde $x \in \widehat{x}$, pentru orice $x \in X$.

ii) Dacă avem $\widehat{a} = \widehat{b}$, atunci din $x \in \widehat{a}$ rezultă $x \in \widehat{b}$, de unde $x\mathcal{R}a$ şi $x\mathcal{R}b$. Folosind simetria şi tranzitivitatea relaţiei $\mathcal{R}$ avem $a\mathcal{R}b$. Invers, dacă $a\mathcal{R}b$, atunci pentru $x \in \widehat{a}$ avem $x\mathcal{R}a$. Din $a\mathcal{R}b$ şi $x\mathcal{R}a$ rezultă $x\mathcal{R}b$, adică $\widehat{a} \subseteq \widehat{b}$. Din simetria relaţiei $\mathcal{R}$ rezultă şi $b \in \widehat{a}$, adică $\widehat{b} \subseteq \widehat{a}$. Prin urmare $\widehat{a} = \widehat{b}$.

iii) Presupunem că $\widehat{a} \cap \widehat{b} = \Phi$, cum $\widehat{a} \neq \Phi$, $\widehat{b} \neq \Phi$, rezultă $\widehat{a} \neq \widehat{b}$, de unde, folosind ii) obţinem că $a\overline{\mathcal{R}}b$. Reciproc, să presupunem că $a\overline{\mathcal{R}}b$. Dacă $\widehat{a} \cap \widehat{b} \neq \Phi$, atunci există $y \in \widehat{a} \cap \widehat{b}$. Din relaţiile $y \in \widehat{a}$ şi $y \in \widehat{b}$ rezultă că $y\mathcal{R}a$ şi $y\mathcal{R}b$, şi cum $\mathcal{R}$ este simetrică obţinem că $a\mathcal{R}y$ şi $y\mathcal{R}b$, de unde prin tranzivitatea lui $\mathcal{R}$, deducem $a\mathcal{R}b$, care constituie o contradicţie. Prin urmare, trebuie ca $\widehat{a} \cap \widehat{b} = \Phi$.

iv) Pentru orice $B \in A/\mathcal{R}$ avem $B \subseteq A$ şi deci $\bigcup\limits_{B \in A/\mathcal{R}} B \subseteq A$. Invers, fie $a \in A$ un element arbitrar. Din i) rezultă $a \in \widehat{a} \in A/\mathcal{R}$, de unde $a \in \bigcup\limits_{B \in A/\mathcal{R}}$. Prin urmare are loc şi incluziunea $A \subset \bigcup\limits_{B \in A/\mathcal{R}} B$, deci şi egalitatea din enunţul propoziţiei.

Definiţia 2.3.10 *Se numeşte partiţie a unei mulţimi A, o familie de submulţimi nevide din A, disjuncte două câte două şi astfel încât reuniunea lor să fie A.*

Observaţia 2.3.2 *Din Propoziţia 2.3.1 rezultă că oricărei relaţii de echivalenţă într-o mulţime A îi corespunde o partiţie a mulţimii A şi reciproc.*

Definiţia 2.3.11 *Relaţia binară $\mathcal{R}$ în mulţimea A se numeşte de* **ordine** *dacă ea este în acelaşi timp reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.*

Relaţiile din exemplele 2.3.1 şi 2.3.2 sunt relaţii de ordine.

De obicei, o relaţie de ordine se notează prin simbolul "$\leq$". O mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine se numeşte **mulţime ordonată**.

Definiţia 2.3.12 *O relaţie de ordine $\mathcal{R}$ în mulţimea A se numeşte* **totală** *dacă oricare $a, b \in A$ avem sau $a\mathcal{R}b$ sau $b\mathcal{R}a$. În caz contrar ea se numeşte relaţie de* **ordine parţială**.

O mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine totală se numeşte **total ordonată**, *iar dacă relaţia este de ordine parţială atunci mulţimea se numeşte* **parţial ordonată**.

Relaţia din exemplul 2.3.2 este totală, iar relaţia din exemplul 2.3.1 este parţială.

Definiţia 2.3.13 *O relaţia binară $\mathcal{R}$ în A se numeşte de ordine strictă dacă este ireflexivă (din $a\mathcal{R}b$ rezultă $a \neq b$) şi tranzitivă.*

Relaţia din exemplul 2.3.3 este o relaţie de ordine strictă.

Observaţia 2.3.3 *Relaţiile de ordine joacă un rol important în logica decizională, cu aplicaţii în conducerea sistemelelor (v. [5]).*

O altă clasă importantă de relaţii binare este cea a aşa–numitelor **relaţii funcţionale** sau **aplicaţii**.

Definiţia 2.3.14 *Se numeşte* **funcţie** *sau* **aplicaţie** *a mulţimii A în mulţimea B o relaţie binară $f = (A, F, B)$ care asociază fiecărui element x din A un element unic determinat din B.*

Mulţimea A se numeşte **domeniul de definiţie** *al funcţiei f, B* **codomeniul** *sau* **mulţimea în care f ia valori**; *iar $F \subseteq A \times B$* **graficul** *aplicaţiei f.*

Dacă $(x, y) \in F$ pentru funcţia $f = (A, F, B)$, atunci scriem $y = f(x)$, spunând că y este **imaginea lui** x prin aplicaţia f sau **valoarea funcţiei** f **în elementul** x. Pentru o funcţie, de obicei, se foloseşte notaţia $f : A \to B$, $f(x) = y$.Când nu se produc confuzii se utilizează şi notaţia $x \xrightarrow{f} f(x)$. Cel mai adesea denumirea unei funcţii se dă după mulţimile A şi B sau după corespondenţa f. Astfel, dacă A şi B sunt submulţimi ale lui $\mathbb{R}$, atunci spunem că avem o funcţie reală. Funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ se numeşte funcţie exponenţială.

Dacă $f : A \to B$ este o funcţie şi $M \subseteq A$, atunci mulţimea $f(M) = \{f(x)|x \in M\} = \{y \in B|(\exists)x \in M, f(x) = y\}$ se numeşte imaginea mulţimii M prin aplicaţia f. Dacă $M = A$, mulţimea $f(A)$ se mai notează şi prin Imf şi se numeşte **imaginea lui** f sau **mulţimea valorilor** funcţiei f.

Dacă $P \subseteq B$, mulţimea $f^{-1}(P) = \{x \in A|f(x) \in P\}$ se numeşte **imaginea inversă (reciprocă)** sau **contraimaginea** mulţimii P prin aplicaţie f.

Definiţia 2.3.15 *Aplicaţiile $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ sunt egale dacă $A = C$, $B = D$ şi $f(x) = g(x)$, pentru orice $x \in A$.*

Definiţia 2.3.16 *Aplicaţia $f_M : M \to B$ se numeşte* **restricţia aplciaţiei $f : A \to B$ la M** *dacă $M \subset A$ şi $f_M(x) = f(x)$, pentru orice $x \in M$. În acest caz funcţia f se numeşte* **extensiunea (prelungirea)** *funcţiei f_M la mulţimea A.*

Definiţia 2.3.17 *Funcţia $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$, pentru orice $x \in A$, se numeşte* **funcţia identică** *a mulţimii A.*

Definiţia 2.3.18 *Aplicaţia $f : A \to B$, $f(x) = b$, b element fixat din B,s e numeşte* **funcţie constantă de valoare** *$b \in B$.*

Definiţia 2.3.19 *O funcţie $f : A \to B$ se numeşte* **injectivă** *dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Altfel spus, funcţia $f : A \to B$ este injectivă dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) = f(x_2)$ avem $x_1 = x_2$, adică oricare ar fi $y \in B$ el are cel mult o contraimagine x în A. O aplicaţie injectivă se mai numeşte şi **injecţie**.

Definiţia 2.3.20 *O funcţie $f : A \to B$ se numeşte* **surjectivă** *sau "***aplicaţie pe***" dacă $f(A) = B$, adică mulţimea valorilor lui f este egală cu mulţimea în care ia valori.*

Cu alte cuvinte, ţinând seama de definiţia lui $f(A)$, funcţia $f : A \to B$ este surjectivă dacă orice element $y \in B$ are cel puţin o contraimagine $x \in A$.

Aplicaţia surjectivă $f : A \to B$ se mai numeşte şi **surjecţie**.

Definiţia 2.3.21 *O funcţie $f : A \to B$ se numeşte* **bijectivă** *dacă ea este în acelaşi timp injectivă şi surjectivă.*

Altfel spus funcţia $f : A \to B$ este surjectivă dacă orice element $y \in B$ este imaginea unui element şi numai unul x din A. O aplicaţie bijectivă $f : A \to B$ se mai numeşte **bijecţie** *sau* **corespondenţă biunivocă între mulţimile A şi B**.

Oricărei funcţii bijective $f : A \to B$, $f(x) = y$ putem să-i asociem în mod unic o aplicaţie f^{-1}, de asemenea, bijectivă numită funcţia inversă definită astfel: $f^{-1} : B \to A$, $f^{-1}(y) = x$. Funcţia f^{-1} se numeşte **inversa** lui f.

Definiţia 2.3.22 *O funcţie bijectivă $f : A \to A$ se numeşte* **permutare** *sau* **substituţie** *a lui A.*

Definiţia 2.3.23 *Se spune că două mulţimi A şi B au aceeaşi* **putere** *sau acelaşi* **cardinal** *dacă există o funcţie bijectivă $f : A \to B$.*

O mulţime A se zice că este finită dacă $A = \Phi$ sau dacă există un număr natural $n > 0$ astfel încât să aibă aceeaşi putere cu mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Scriem card $A = n$, iar card $\Phi = 0$. În caz contrar spunem că A este **infinită**. Se spune că A este **numărabilă** dacă are aceeaşi putere cu mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale. O mulţimea A este **cel mult numărabilă** dacă este finită sau numărabilă. O mulţimea A are **puterea continuului** dacă are aceeaşi putere cu $\mathbb{R}$.

2.4 Grupuri, inele şi corpuri

Definiţia 2.4.1 *Se numeşte* **lege de compoziţie internă** *sau* **operaţie internă** *pe mulţimea A o funcţie definită pe $A \times A$ cu valori în A.*

Se observă că o astfel de aplicaţie $\varphi : A \times A \to A$ ataşează fiecărei perechi ordonate (x, y) de elemente din A un element $z = \varphi(x, y)$ unic determinat din A. Elementul z se numeşte **compusul** lui x şi cu y. Scriem $x\varphi y = z$ şi citim "x operat cu y prin operaţia φ dă z". Pentru operaţia "φ" se folosesc diverse notaţii: "$+$", "$-$", "$\cdot$", "$\perp$", "$\top$", "$*$", "$\circ$", etc. Faptul că mulţimea A este înzestrată cu operaţie internă "$*$" se notează cu $(A, *)$.

Observaţia 2.4.1 *Legile de compoziţie interne definite în Definiţia 2.4.1 se numesc* **binare pe** *A spre deosebire de legile de compoziţie* **interne n–are pe** *A, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, care sunt aplicaţii ale mulţimii $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ ori}}$ în A.*

Definiţia 2.4.2 *Fie $(A, *)$ înzestrată cu operaţia internă "$*$". O submulţime $B \subset A$ se zice* **stabilă (închisă)** *faţă de operaţia internă "$*$" definită pe A, dacă oricare ar fi $x, y \in B$ avem $x * y \in B$.*

Operaţia internă "$*$" peste tot definită pe B se mai numeşte şi **operaţie internă indusă** de operaţia internă "$*$" dată pe A.

Definiţia 2.4.3 *O operaţie internă "$*$" definită pe A se numeşte* **asociativă** *dacă $(x * y) * z = x * (y * z)$, pentru orice x, y, z in A.*

Definiţia 2.4.4 *O operaţie internă "$*$" definită pe A se numeşte* **comutativă** *dacă $x * y = y * x$, pentru orice $x, y \in A$.*

Definiţia 2.4.5 *Fie $(A, *)$. Se zice că un element $e \in A$ este* **neutru** *pentru operaţia internă "$*$" dacă $x * e = e * x = x$, pentru orice $x \in A$.*

Propoziţia 2.4.1 *Dacă o operaţie internă pe mulţimea A admite element neutru, atunci acesta este unic.*

Demonstraţie. Să presupunem că pentru operaţia internă "$*$" definită pe A ar exista două elemente neutre e şi f. Cum e este neutru, putem scrie $f*e = f$. Deoarece şi f este neutru, avem $f * e = e$. Comparând, rezultă $e = f$, adică elementul neutru este unic când există.

Observaţia 2.4.2 *Dacă operaţia internă este de tip aditiv (adunare), atunci elementul neutru se notează cu* 0 *şi se numeşte "zero" sau "element nul". Dacă operaţie internă este notată multiplicativ, atunci elementul neutru se numeşte* **element unitate** *şi se notează cel mai adesea cu* 1.

Definiţia 2.4.6 *Fie e elementul neutru pentru operaţia internă "$*$" definită pe A. Se spune că elementul $a \in A$ are un* **element simetric** *$b \in A$, faţă de operaţia internă "$*$", dacă $a * b = b * a = e$.*

Se observă iemdiat că dacă b este simetricul lui a atunci şi a este simetricul lui b. Dacă a are un simetric, se zice că a este **simetrizabil**.

Propoziţia 2.4.2 *Dacă o operaţie internă "$*$" pe A este asociativă, atunci orice element din A are cel mult un simetric.*

Demonstraţie. Dacă $a \in A$ ar avea două elemente simetrice b şi c, atunci $b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c$, ceea ce trebuie demonstrat.

Observaţia 2.4.3 *Dacă operaţia internă este notată aditiv, atunci simetricul unui element a se numeşte* **opusul** *lui a şi se notează cu $-a$. Dacă operaţia internă este de tip multiplicativ, simetricul unui element a se numeşte* **inversul** *lui a şi se notează cu a^{-1}.*

Definiţia 2.4.7 *Fie $(A, *)$ şi $(B, \circ)$ două mulţimi înzestrate respectiv cu operaţiile interne "$*$" şi $\circ$. O funcţie $f : A \to B$ se numeşte* **morfism** *sau* **homomorfism** *pentru operaţiile "$*$" şi "$\circ$" dacă oricare ar fi $x, y \in A$ avem $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$ (condiţia de păstrare a operaţiilor).*

Dacă f este bijectivă, atunci, se spune că avem un **izomorfism**, *iar despre mulţimile $(A, *)$ şi $(B, \circ)$ se zice că sunt* **izomorfe**. *Faptul că $(A, *)$ şi $(B, \circ)$ sunt izomorfe se notează prin $(A, *) \simeq (B, \circ)$.*

Dacă $A = B$, atunci un morfism $f : A \to A$ se numeşte **endomorfism**, *iar un izomorfism se numeşte* **automorfism**.

Definiţia 2.4.8 *O mulţime $(M, *)$, înzestrată cu operaţia internă asociativă şi cu element neutru, se numeşte* **monoid**.

Dacă, în plus, operaţia internă este comutativă, monoidul se numeşte **comutativ** *sau* **abelian**.

Definiţia 2.4.9 *Se numeşte* **grup** *o mulţime nevidă G înzestrată cu o operaţie internă "$*$", care verifică condiţiile:*

1. $(G, *)$ *este monoid;*

2. orice element din G *este simetrizabil.*

Dacă, în plus, $(G, *)$ *este monoid comutativ, atunci se spune că* $G(, *)$ *este un grup* **comutativ** *sau* **abelian**.

Definiţia 2.4.10 *O submulţime* H *a grupului* $(G, *)$ *se numeşte* **subgrup** *al lui* G *dacă* $(H, *)$ *este grup.*

Propoziţia 2.4.3 *Condiţia necesară şi suficientă ca submulţimea* H *a lui* $(G, *)$ *să fie subgrup al lui* G *este ca:*

1. $x * y \in H$, *pentru orice* $x, y \in H$;

2. pentru orice $x \in H$ *simetricul* x' *al lui* x *este din* H.

Demonstraţie. **Necesitatea.** Dacă H ste subgrup al lui H, atunci din definiţia grupului rezultă că trebuie să fie îndeplinite condiţiile 1) şi 2).

Suficienţa. Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile 1) şi 2). Atunci din 1) rezultă că operaţia "$*$" este internă pe H. Ea este asociativă deoarece este asociativă în $(G, *)$. Din condiţia 2) rezultă că orice $x \in H$ are un simetric $x' \in H$. Dacă în 1) punem $y = x'$ avem că $x * x' = e \in H$. Fiind verificată definiţia grupului rezultă că $(H*)$ este un subgrup al lui $(G, *)$.

Observaţia 2.4.4 *Dacă transpunem noţiunile de morfism şi izomorfism la două grupuri, atunci obţinem* **morfisme de grupuri** *şi* **izomorfisme de grupuri**.

Definiţia 2.4.11 *Fie* $(A, \circ, *)$ *înzestrată cu două operaţii interne "*$\circ$*" şi "*$*$*". Spunem că operaţia "*$\circ$*" este* **distributivă** *faţă de operaţia "*$*$*" dacă*

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) \quad \text{şi} \quad (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$$

pentru orice x, y, z *din* A.

Cele două condiţii exprimă distributivitatea operaţiei "$\circ$" faţă de operaţia $*$", respectiv **la stânga** şi **la dreapta**. Dacă operaţia "$\circ$" este comutativă, atunci distributivitatea la stânga este echivalentă cu cea la dreapta.

Definiţia 2.4.12 *O mulţime* $(I, *, \circ)$, *înzestrată cu două operaţii interne, se numeşte* **inel** *dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

1. $(I, *)$ *este grup abelian,*

2. $(I, \circ)$ *este monoid cu element neutru;*

3. operaţia "$\circ$" este distributivă faţă de operaţia "$*$".

Pentru a nu complica scrierea, atunci când este posibil, vom folosi notaţiile "$+$" şi "$\cdot$" pentru "$*$" şi respectiv "$\circ$". Convenim să scriem xy în loc de $x \cdot y$, pentru $x, y \in I$.

Dacă operaţia "$\circ$" este comutativă, atunci inelul $(I, *, \circ)$ se numeşte **inel comutativ**.

Definiţia 2.4.13 *O mulţime $(K, *, \circ)$, înzestrată cu două operaţii interne, se numeşte* **corp** *dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

1. $(I, *, \circ)$ este inel;

2. orice element diferit de elementul neutru faţă de "$*$" este simetrizabil faţă de operaţia "$\circ$".

Dacă operaţia "$\circ$" este comutativă, atunci corpul $(K, *, \circ)$ se numeşte **corp comutativ** sau **câmp**.

Observaţia 2.4.5 *Morfismul şi izomorfismul de inele, respectiv corpuri se obţine din Definiţia 2.4.7, extinzând condiţia de păstrare a operaţiilor la ambele operaţii din inele, respectiv corpuri.*

2.5 Probleme

1. Arătaţi că:

1. $p \vee (\overline{p} \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$;
2. $(p \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
3. $((p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee s) \wedge (r \vee s)) \Leftrightarrow ((p \wedge s) \vee (q \wedge r))$.

2. Pentru ce valori ale propoziţiilor x, y, z formulele logice de mai jos sunt adevărate? Dar false?

1. $((x \vee y) \vee z) \Rightarrow ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$;
2. $(x \vee y) \Rightarrow ((\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}))$;
3. $((x \vee y) \wedge ((y \vee z) \wedge (z \vee x))) \Rightarrow ((x \wedge y) \wedge z)$.

3. Ştiind că A, B, C sunt submulţimi ale mulţimii T calculaţi expresiile:

1. $A \cap B \cap A$;
2. $A \cap B \cap \overline{A}$;

3. $(A \cap T) \cap B$;
4. $A \cup \overline{B} \cup \Phi$;
5. $A \cap (A \cup B)$;
6. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B})$;
7. $A \cap (A \cup B \cup C)$;
8. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$;
9. $\overline{(\overline{A} \cup B) \cup (A \cap \overline{C})}$;
10. $\overline{(A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{C}) \cap (C \cup \overline{A})}$;
11. $\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \overline{A}}$.

4. Ce se poate afirma despre mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_{2000}$ dacă $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_{2000} \subseteq A_1$?

5. Un sondaj asupra cititorilor a trei reviste într-o populaţie P destul de largă furnizează rezultatele următoare: 60% din indivizii lui P citesc revista a; 50% din indivizii lui P citesc revista b; 50% citesc c; 20% citesc b şi c; 50% citesc a şi c; 30% citesc a şi b şi 10% citesc toate cele trei reviste. Dacă populaţia P are 1000 de indivizi, atunci câţi indivizi citesc exact două reviste? Câţi din ei nu citesc nici o revistă?

6. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$, şi oricare n mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, are loc egalitatea

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)$$

Arătaţi că pentru $n = 2$ şi $n = 3$ mulţimile în care se descompune $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ sunt disjuncte. Ce se întâmplă pentru $n \geq 4$?

7. Să se arate că dacă $C \neq \Phi$, atunci din

$$A \times C \subseteq B \times C \quad \text{rezultă} \quad A \subseteq B.$$

8. Fie $A(x, y)$ şi $B(u, v)$ puncte din planul xOy. Punctele A şi B sunt în relaţia ”$\sim$” dacă şi numai dacă $xy = uv$. Arătaţi că ”$\sim$” este o relaţie de echivalenţă şi precizaţi clasele de echivalenţă.

9. Fie $f : A \to B$ o aplicaţie. Elementul $x, y \in A$ sunt în relaţie $\mathcal{R}$ dacă $f(x) = f(y)$. Arătaţi că $\mathcal{R}$ este o relaţie de echivalenţă pe A.

10. Arătaţi că în mulţimea sportivilor "a alerga cu aceeaşi viteză" defineşte o relaţie de echivalenţă.

11. Arătaţi că în mulţimea oamenilor "a avea aceeaşi grupă sanguină" defineşte o relaţie de echivalenţă.

12. Pe mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale definim relaţia: "$x, y \in \mathbb{N}$ sunt în relaţia "$\equiv$" dacă x şi y sunt simultan pare sau impare". Arătaţi că relaţia "$\equiv$" este de echivalenţă şi precizaţi clasele de echivalenţă.

13. Pe mulţimea H a halterofililor definiţi o relaţie de echivalenţă care să-i împartă pe categorii.

14. Fie $[l_1, l_2), [l_2, l_3), \ldots, [l_n, l_{n+1})$ o mulţime de intervale cu $l_1 < l_2 < \ldots < l_n < l_{n+1}$. Pe intervalul $[l_1, l_{n+1})$ definim relaţia binară "$\sim$" prin $x, y \in [l_1, l_{n+1})$. $x \sim y$ dacă există $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ aşa încât $x, y \in [l_i, l_{i+1})$.

Arătaţi că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă. Precizaţi clasele de echivalenţă. Această relaţie de echivalenţă se întâlneşte în măsurătorile statistice.

15. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulţimea localităţilor din România. Pe mulţimea L a locuitorilor României definim relaţia binară: $x, y \in L$, $x \sim y$, dacă x şi y locuiesc în aceeaşi localitate.

Arătaţi că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă şi precizaţi clasele de echivalenţă.

16. Pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ definim relaţia ρ astfel: "$m, n \in \mathbb{N}$, $m\rho n$ dacă şi numai dacă:

i) $m = n$;

ii) $m \neq n$, m impar şi n par;

iii) m şi n au aceeaşi paritate şi $m < n$.

Arătaţi că ρ este o relaţie de ordine totală pe $\mathbb{N}$.

17. Fie $f : A \to B$ o funcţie şi M şi P submulţimi ale lui A. Arătaţi că:

i) $f(M \cup P) = F(M) \cup f(P)$;

ii) $f(M \cap P) \subseteq f(M) \cap f(P)$.

În ce condiţii în relaţia ii) are loc egalitatea?

18. Să se studieze inversabilitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x| - 2x$.

19. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ găsiţi Imf.

20. Fie date funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$. Demonstraţi următoarele afirmaţii:

1. dacă f şi g sunt injective respectiv surjective, atunci $g \circ f$ este injectivă, respectiv surjectivă;

2. dacă $g \circ f$ este injectivă, respectiv surjectivă, atunci f este injectivă şi respectiv g este surjectivă.

21. Fie $(G, *)$ şi $(H, \circ)$ două grupuri. Dacă $f : G \to H$ este un homomorfism, atunci sunt valabile afirmaţiile:

1. $f(e) = e_1$, unde e este elementul neutru pentru operaţia "$*$", iar e_1 elementul netru pentru operaţia "$\circ$";

2. Pentru orice $x \in G$ avem $f(x') = (f(x))'$, unde x' este simetricul lui x în G, iar $(f(x))'$ simetricul lui $f(x)$ în H;

3. Imaginea unui subgrup al lui G prin f este un subgrup al lui H;

4. Contraimaginea unui subgrup al lui H prin f este un subgrup al lui G.

Comentariu. Contraimaginea subgrupului lui H format numai din elementul neutru al lui H se numeşte **nucleul lui** f şi se notează prin $Ker\ f$, unde Ker este prescurtarea cuvântului englezesc **kernel** care înseamnă nucleu.

22. Arătaţi că aplicaţia $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, A mulţime nevidă, definită prin $f(X) = C_A(X)$, oricare ar fi $X \in \mathcal{P}(A)$, este un automorfism.

23. Fie A şi B două mulţimi finite cu card $A = m$ şi card $B = n$:

i) Să se arate că este necesar şi suficient să existe o funcţie injectivă de la A la B ca $m \leq n$. În acest caz să se arate că numărul de funcţii injective de la A la B este egal cu $A_n^m = n!/(n-m)!$;

ii) Să se arate că este necesar şi suficient să existe o funcţie surjectivă de la A la B cu $n \leq m$. În acest caz să se arate că numărul funcţiilor surjective de la A la B este dat de

$$S_{m,n} = n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - C_n^3(n-3)^m + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}1^m;$$

iii) Să se arate că este necesar şi suficient ca să existe o funcţie bijectivă de la A la B cu $m = n$. În acest caz să se arate că numărul funcţiilor bijective de la A la B este egal cu $P_n = n!$.

24. Să se arate că reuniunea a două mulţimi numărabile disjuncte este o mulţime numărabilă.

25. Fie A, B două mulţimi finite având acelaşi număr de elemente. Fie $f : A \to B$ o aplicaţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) f este injectivă;

ii) f este surjectivă;

iii) f este bijectivă.

2.6 Testul Nr. 1 de verificare a cunoştinţelor

1. Definiţi următoarele noţiuni:

   a) Conjuncţia propoziţiilor elementare;

   b) Formulă logică realizabilă;

   c) Reuniunea a două mulţimi;

   d) Produs cartezian a două mulţimi;

   e) Relaţie binară;

   f) Partiţie a unei mulţimi;

   g) Funcţia identică a unei mulţimi;

   h) Funcţie bijectivă;

   i) Lege de compoziţie internă;

   j) Grup;

   k) Câmp.

2. Arătaţi că următoarea formulă este tautologie $F = (p \to q) \wedge p \to q$.

3. Rezolvaţi problema decidabilităţii pentru următoarea formulă: $x \vee y \vee z \to x \wedge (y \vee z)$.

4. Să se demonstreze
$$\overline{(\forall x)F[x]} \Longleftrightarrow (\exists x)\overline{F[x]},$$
unde F este un predicat unar cu domeniul finit $D = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$.

5. Să se arate că $(\exists x, \forall y)F[x, y] \Longrightarrow (\forall y, \exists x)F[x, y]$, unde F este predicat binar cu domeniul $\{a_1, ..., a_p\} \times \{b_1, ..., b_q\}$.

6. Fie $r_1 < r_2 < ... < r_n < ...$ numere naturale şi $a \in \mathbb{N}$. Pentru orice număr natural k, notăm $A_k = \{a + r_k \cdot m \mid m = 1, 2, 3, ...\}$. Dovediţi că nu există nici un element comun tuturor mulţimilor A_k, $k \geq 1$.

7. Demonstraţi că dacă $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ sunt periodice T_1 şi T_2 cu $\dfrac{T_1}{T_2} \in Q$, atunci $f + g$ este periodică şi reciproc.

8. În $\mathbb{C}$ se defineşte relaţia ρ prin $z_1 \rho z_2 \Longleftrightarrow |z_1| = |z_2|$. Arătaţi că ρ este o relaţie de echivalenţă şi precizaţi clasele de echivalenţă.

9. În $\mathbb{Z}$ se defineşte relaţia de congruenţă modulo m ($m \in \mathbb{N}$) prin $a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow a - b \,\vdots\, m$ sau $a - b \in \mathcal{M}_m$ ($\mathcal{M}_m$ reprezintă mulţimea multiplilor lui m). Arătaţi că este o relaţie de echivalenţă şi precizaţi clasele de echivalenţă.

10. În $\mathbb{N}$ se consideră relaţia „ $\leq$" definită prin $x \leq y \Longleftrightarrow (\exists)\ z \in \mathbb{N}$ astfel încât $y = x + z$. Arătaţi că „ $\leq$" este o relaţie de ordine totală.

Capitolul 3

Spaţii vectoriale

"Ne discere cesa! Vita sine litteris mors est (Nu înceta să înveţi! Viaţa fără învăţătură este moarte.)

Noţiunea de spaţiu vectorial (liniar) prezintă o importanţă deosebită în matematica modernă, cu multe aplicaţii şi în problemele economice.

3.1 Definiţia spaţiului vectorial

În acest paragraf vom trata noţiunea de spaţiu vectorial şi principalele ei proprietăţi.

Definiţia 3.1.1 *Se numeşte lege de compoziţie (operaţie) externă pe mulţimea M faţă de mulţimea K, o funcţie $f : K \times M \to M$.*

Mulţimea K se numeşte domeniul **operatorilor** *sau* **scalarilor**

Exemplul 3.1.1. Aplicaţia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin formula $f(a, z) = a\overline{z}$, $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, este o operaţie externă pe $\mathbb{C}$ având pe $\mathbb{R}$ ca domeniu de operatori.

Acum, fie V o mulţime nevidă de elemente oarecare şi K un câmp de elemente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, cu 0 elementul neutru (nul) şi 1 elementul unitate. Suma respectiv produsul elementelor α şi β din K va fi notată cu $\alpha + \beta$, respectiv $\alpha \cdot \beta$ sau simplu $\alpha\beta$.

Definiţia 3.1.2 *Se spune că pe mulţimea V s-a definit o structură de* **spaţiu vectorial (liniar)** *peste câmplul K, dacă pe V s-a definit o lege de compoziţie internă $(x, y) \to x + y$, $x, y \in V$, numită adunare, şi o lege de compoziţie externă faţă de câmpul K, $(\alpha, x) \to \alpha x$, $\alpha \in K$, $x \in V$, numită* **înmulţire cu scalari**, *astfel că pentru orice $x, y, z \in V$ şi orice $a, b \in K$ să avem*

1. *$x + y = y + x$ (comutativitatea adunării);*

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(asociativitatea adunării);*

3. Există elementul $\theta \in V$*, astfel ca* $x + \theta = \theta + x = x$*;*

4. Oricărui $x \in V$ *îi corespunde* $-x \in V$ *astfel cu* $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ *(*$-x$ *se numeşte* **opusul** *lui* x*);*
(Prin urmare $(V+)$ *este un grup comutativ);*

5. $1 \cdot x = x$*;*

6. $(a + b)x = ax + bx$*;*

7. $(ab)x = a(bx)$*;*

8. $a(x + y) = ax + ay$*.*

Mulţimea V *împreună cu structura de spaţiu vectorial peste câmpul* K *se numeşte spaţiu vectorial (liniar) peste* K*, iar elementele sale le vom numi* **vectori***.*

Se observă că operaţia de adunare a vectorilor din V *a fost notată tot cu semnul "+" ca şi adunarea din* K*, iar operaţia de înmulţire cu scalari a fost notată cu "·" ca şi înmulţirea din* K*, acest lucru nu produce confuzie deoarece în context orice ambiguitate este înlăturată.*

Dacă K *este corpul* $\mathbb{R}$ *al numerelor reale, atunci* V *se numeşte* **spaţiu vectorial real***, iar dacă* K *este corpul* $\mathbb{C}$ *al numerelor complexe, atunci* V *se numeşte spaţiu vectorial complex.*

Elementul $\theta \in V$ *se numeşte* **vectorul nul** *al spaţiului vectorial* V*.*

Propoziţia 3.1.1 *Dacă* V *este un spaţiu vectorial peste* K*, atunci*

1. $0 \cdot x = \theta$*, pentru orice* $x \in V$*;*

2. $a \cdot \theta = \theta$*, pentru orice* $a \in K$*;*

3. $(-1)x = -x$*, pentru orice* $x \in V$*.*

Demonstraţie. 1. Utilizând condiţiile 5) şi 6) din Definiţia 3.1.2, avem

$$x = 1 \cdot x = (0 + 1)x = 0 \cdot x + 1 \cdot x = 0 \cdot x + x,$$

de unde, folosind condiţia 3) din aceeaşi definiţie, rezultă $0 \cdot x = \theta$.

2. Din condiţia 6) a Definiţiei 3.1.2 avem $ax + a\theta = a(x + \theta) = ax$ şi ţinând seama de condiţia 3) din aceeaşi definiţie, rezultă $a \cdot \theta = \theta$.

3. Din condiţia 6) avem $x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = \theta$, de unde folosind 4), obţinem $(-1)x = -x$.

Exemple. 3.1.2. Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale cu operaţia de adunare şi cu operaţia de înmulţire cu numere raţionale este un spaţiu vectorial peste câmpul

Q al numerelor raţionale.

3.1.3. Mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe cu operaţia de adunare şi cu operaţia externă de înmulţire cu numere reale este un spaţiu vectorial peste câmpul $\mathbb{R}$ al numerelor reale.

3.1.4. Fie $Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ funcţie}\}$ în care definim operaţiile de adunare a două funcţii şi de înmulţire a unei funcţii cu un număr real astfel:

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x), (\forall) f, y \in Hom(f, g) \text{ şi } (\forall) x \in \mathbb{R}$$

şi

$$\alpha f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\alpha f)(x) = \alpha f(x), (\forall) f \in Hom(f, g) \text{ şi } (\forall) r \in \mathbb{R}.$$

Aceste operaţii determină pe $Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o structură de spaţiu vectorial.

3.1.5. Fie K un câmp oarecare şi n un număr natural nenul. Considerăm produsul cartezian $K^n = \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n \ ori}$, adică mulţimea sistemelor ordonate $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de câte n elemente din K. Definim pe K^n operaţiile:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n),$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in K^n$ şi $a \in K$.

Înzestrată cu cele două operaţii definite mai sus, mulţimea K^n devine un spaţiu vectorial, numit **spaţiul vectorial aritmetic cu** n **dimensiuni peste** K. Pentru $K = \mathbb{R}$ se obţin **spaţiile euclidiene**, iar pentru $K = \mathbb{C}$ se obţin **spaţiile unitare** sau **hermitice**. În cazul unui vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ din K^n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc **componentele** sau **coordonatele** vectorului x. De aceea, când vom nota vectorii cu indici vom folosi scrierea cu exponenţi în paranteză, pentru a se deosebi de componentele sale.

Comentariul 3.1.1. Spaţiile vectoriale $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{C}^n$ sunt instrumente matematice de bază în studiul modelelor matematico-economice. Spaţiile $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$ conduc la vectorii utilizaţi în fizică.

3.2 Subspaţii vectoriale

O submulţime W a unui spaţiu vectorial V peste un câmp K se numeşte **subspaţiu vectorial** al lui V, dacă cele două operaţii date pe V induc pe W o structură de spaţiu vectorial peste K. Vom nota faptul că W este un subspaţiu al lui V prin $W \Subset V$.

Teorema 3.2.1 *Submulţimea W a unui spaţiu vectorial V peste câmpul K este subspaţiu vectorial peste câmpul K, dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

1. *pentru orice $x, y \in W$ avem $x + y \in W$;*

2. *pentru orice $x \in W$ şi orice $a \in K$ avem $ax \in W$.*

Demonstraţie. Dacă $W \Subset V$, atunci condiţiile 1) şi 2) rezultă din faptul că operaţiile din V trebuie să fie interne şi pe W.

Reciproc, dacă presupunem că 1) şi 2) au loc şi luând $x \in W$, din 2) rezultă că şi $-x = (-1)(x) \in W$, iar de aici, folosind 1), rezultă că $\theta = x + (-x)$ se găseşte în W. Celelalte condiţii din definiţia unui spaţiu vectorial având loc pe V au loc şi pe W. Teorema precedentă este echivalentă cu:

Teorema 3.2.2 *Submulţimea W a spaţiului vectorial V peste K este subspaţiu vectorial pentru V peste K, dacă şi numai dacă, pentru orice $a, b \in K$ şi orice $x, y \in W$ avem $ax + by \in W$.*

Observaţia 3.2.1 *Orice subspaţiu vectorial W al unui spaţiu vectorial V conţine vectorul nul.*

Exemple. 3.2.1. Dacă V este un spaţiu vectorial, atunci submulţimea $\{\theta\}$, formată numai din vectorul nul, este un subspaţiu vectorial numit **subspaţiul nul**.

3.2.2. Pentru spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$ şi numărul real a fixat, submulţimea $W = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = (x_1, y_1) \text{ cu } y_1 = ax_1\}$ formează un subspaţiu vectorial.

Într-adevăr, dacă $x, y \in W$, $x = (x_1, y_1)$, $y_1 = ax_2$, $y = (x_2, y_2)$, $y_2 = ax_2$, atunci: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ cu $y_1 + y_2 = ax_1 + ax_2 = a(x_1 + x_2)$ şi deci $x + y \in W$. Pentru $a \in \mathbb{R}$ avem $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha y_1)$, cu $\alpha y_1 = \alpha(ax_1) = a(\alpha x_n)$ şi deci $\alpha x \in W$.

Cele demonstrate ne arată că, în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$ (în plan) dreptele ce trec prin origine formează subspaţii vectoriale pentru $\mathbb{R}^2$.

3.2.3. Dacă K este un câmp, atunci mulţimea vectorilor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ din K^n cu $x_n = 0$ formează un subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial K^n.

Uşor se verifică faptul că intersecţia a două subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial V este tot un subspaţiu vectorial al lui V. Prin urmare, dacă A este o submulţime a spaţiului vectorial V, atunci există un cel mai mic subspaţiu al lui V care conţine pe A, anume intersecţia tuturor subspaţiilor lui V ce conţin pe A, numit **subspaţiu generat de** A sau **acoperirea (înfăşurătoarea) liniară a lui** A.

Două subspaţii W_1 şi W_2 ale unui spaţiu vectorial se zic independente dacă $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Fie $S = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\}$ un sistem de n vectori, $n \in \mathbb{N}^*$, din spaţiul vectorial V peste câmpul K.

Definiţia 3.2.1 *Se spune că vectorul $x \in V$ este o* **combinaţie liniară** *de vectorii sistemului S dacă există n scalari $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ astfel ca să avem*

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{(k)}.$$

Teorema 3.2.3 *Mulţimea vectorilor din spaţiu vectorial V care se pot scrie ca şi combinaţii liniare de vectorii sistemului S formează un subspaţiu vectorial al lui V. Acest subspaţiu se notează prin $[S]$ şi se numeşte* **subspaţiul lui V generat de sistemul de vectori** *S.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $x = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{(k)}$ şi $y = \sum_{k=1}^{n} b_k x^{(k)}$, atunci, pentru orice $\alpha, \beta \in K$, avem

$$\alpha x + \beta y = \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k x^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} \beta b_k x^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) x^{(k)},$$

adică $\alpha x + \beta y$ este o combinaţie liniară de vectori a sistemului S.

Teorema 3.2.4 *Subspaţiul $[S]$ generat de sistemul de vectori S coincide cu acoperirea liniară a lui S.*

Demonstraţie. Fie S^* acoperirea liniară a lui S. Avem $S \subseteq [S]$ şi din definiţia lui S^* rezultă $S^* \subseteq [S]$. Reciproc, dacă $x \in [S]$, atunci rezultă că $x = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{(k)}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$. Prin urmare, $x \in S^*$, adică $[S] \subseteq S^*$. Rezultă că $S^* = [S]$.

Definiţia 3.2.2 *Un sistem de vectori $S \subset V$ se numeşte* **sistem de generatori** *pentru subspaţiul $W \Subset V$ dacă $W = [S]$.*

Exemplul 3.2.4. În spaţiul $\mathbb{R}^n$ un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^n$ este format din vectorii: $e^{(1)} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e^{(2)} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e^{(n)} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. În adevăr, orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se scrie sub forma $x = x_1 e^{(1)} + x_2 e^{(2)} + \ldots + x_n e^{(n)}$.

Definiţia 3.2.3 *Dacă W_1 şi W_2 sunt subspaţii ale spaţiului vectorial V, atunci subspaţiul generat de $S = W_1 \cup W_2$ se numeşte suma celor două subspaţii. Notăm $[S] = W_1 + W_2$.*

Teorema 3.2.5 *Suma $W_1 + W_2$ a două subspaţii vectoriale ale lui V coincide cu mulţimea vectorilor $x \in V$ care se scrie sub forma $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, cu $x^{(1)} \in W_1$, $x^{(2)} \in W_2$.*

Demonstraţie. Fie $W = \{x \in V | x = x^{(1)} + x^{(2)}, x^{(1)} \in W_1, x^{(2)} \in W_2\}$. Evident că $W \subseteq W_1 + W_2$. Dacă $x \in W_1 + W_2$, atunci $x = a_1 y^{(1)} + \ldots + a_r y^{(r)} + a_{r+1} y^{(r+1)} + \ldots + a_p y^{(p)}$, unde $y^{(1)}, \ldots, y^{(r)} \in W_1$, iar $y^{(r+1)}, \ldots, y^{(p)} \in W_2$. Punând $x^{(1)} = a_1 y^{(1)} + \ldots + a_r y^{(r)}$ şi $x^{(2)} = a_{r+1} y^{(r+1)} + \ldots + a_p y^{(p)}$, găsim $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, deci $W_1 + W_2 \subseteq W$. Rezultă $W = W_1 + W_2$.
Exemplul 3.2.5. În $\mathbb{R}^2$ considerăm $W_1 = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$ şi $W_2 = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$. Atunci avem $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$.

Definiţia 3.2.4 *Suma S a două subspaţii vectoriale W_1 şi W_2 ale spaţiului vectorial V se numeşte directă, dacă $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$. În acest caz scriem $S = W_1 \oplus W_2$, iar despre W_1 şi W_2 se zic că sunt* **subspaţii vectoriale independente**.

Teorema 3.2.6 *Suma a două subspaţii vectoriale W_1 şi W_2 ale spaţiului vectorial V este directă, dacă şi numai dacă orice vector x din $S = W_1 + W_2$ se scrie în mod unic sub forma $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $x^{(1)} \in W_1$, $x^{(2)} \in W_2$.*

Demonstraţie. Să admitem că $S = W_1 \oplus W_2$ şi să presupunem că există $x \in S$ aşa încât $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $x^{(1)} \in W_1$, $x^{(2)} \in W_2$ şi $x = y^{(1)} + y^{(2)}$, $y^{(1)} \in W_1$, $y^{(2)} \in W_2$. Atunci $x^{(1)} + x^{(2)} = y^{(1)} + y^{(2)}$, de unde $x^{(1)} - y^{(1)} = x^{(2)} - y^{(2)} \in W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$ şi deci $x^{(1)} = y^{(1)}$ şi $x^{(2)} = y^{(2)}$. Rezultă că scrierea lui x ca sumă de elemente din W_1 şi W_2 este unică.

Reciproc, să admitem că orice $x \in S = W_1 + W_2$, are o scriere unică de forma $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $x^{(1)} \in W_1$, $x^{(2)} \in W_2$. Dacă ar exista $t \in W_1 \cap W_2$, $t \neq \theta$, atunci $x = (x^{(1)} - t) + (x^{(2)} - t)$, cu $x^{(1)} - t \in W_1$ şi $x^{(2)} - t \in W_2$, ceea ce ar fi o contradicţie. Prin urmare $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$, adică $S = W_1 \oplus W_2$.

Definiţia 3.2.5 *Două subspaţii W_1 şi W_2 ale spaţiului vectorial V se numesc* **suplimentare** *dacă $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$ şi $V = W_1 \oplus W_2$.*

Exemplul 3.2.6. Spaţiul vectorial $Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ al funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este suma directă a subspaţiilor W_1 şi W_2 ale funcţiilor pare şi respectiv impare deoarece $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$. Cum, pentru orice $f \in Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avem

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}, (\forall) x \in \mathbb{R},$$

adică suma dintre o funcţie pară şi una impară, deducem că W_1 şi W_2 sunt subspaţii vectoriale suplimentare pentru $Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3.3 Independenţa şi dependenţa liniară a vectorilor. Bază şi dimensiune

Definiţia 3.3.1 *Sistemul de vectori $S = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\}$ din spaţiul vectorial V peste câmpul K se zice că este* **liniar independent** *dacă o combinaţie* *liniară a lor* $a_1x^{(1)} + a_2x^{(2)} + \ldots + a_nx^{(n)}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, *dă vectorul nul numai dacă* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

În caz contrar, adică dacă există cel puţin o mulţime de scalari $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, *nu toţi nuli, astfel ca* $\sum_{i=1}^{n} a_ix^{(i)} = \theta$, *atunci se zice că sistemul* S *de vectori este* **liniar dependent**.

Dacă sistemul S de vectori este liniar independent (liniar dependent), se mai zice că vectorii $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ sunt liniar independenţi (liniar dependenţi).

Exemple. 3.3.1. Vectorii $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}$ (v.exemplul 3.2.4) sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}^n$. În adevăr, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ astfel ca $\sum_{i=1}^{n} a_ie^{(i)} = \theta$, atunci rezultă $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \theta$, de unde obţinem că $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

3.3.2. Vectorii $x^{(1)} = (1, 2, -1)$, $x^{(2)} = (2, 1, 1)$ şi $x^{(3)} = (4, -1, 5)$ sunt liniar dependenţi în $\mathbb{R}^3$ deoarece avem $2x^{(1)} - 3x^{(2)} + x^{(3)} = \theta$.

Teorema 3.3.1 *Sistemul* $S = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\}$ *de vectori este liniar dependent, dacă şi numai dacă cel puţin unul din vectorii lui* S *se poate exprima ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori ai sistemului.*

Demonstraţie. Dacă sistemul S este liniar dependent, atunci există scalarii $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, nu toţi nuli, astfel ca $a_1x^{(1)} + \ldots + a_nx^{(n)} = \theta$. Presupunem că $a_1 \neq 0$, atunci $x^{(1)} = -a_2a_1^{-1}x^{(2)} - a_3a_1^{-1}x^{(3)} - \ldots - a_na_1^{-1}x^{(n)}$, ceea ce ne arată că vectorul $x^{(1)}$ se exprimă ca o combinaţie liniară de vectorii $x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$.

Reciproc, dacă cel puţin un vector, de exemplu $x^{(1)}$, se exprimă ca o combinaţie liniară de ceilalţi, atunci putem scrie $x^{(1)} = -a_2x^{(2)} - \ldots - a_nx^{(n)}$, de unde $x^{(1)} + a_2x^{(2)} + \ldots + a_nx^{(n)} = \theta$, cu coeficientul lui $x^{(1)}$ nenul, ceea ce ne arată că vectorii $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ sunt liniar dependenţi.

Propoziţia 3.3.1 *Într-un spaţiu vectorial* V *peste câmpul* K *sunt valabile afirmaţiile:*

i) vectorul nul θ *formează un sistem liniar dependent;*

ii) orice vector $x \neq \theta$ *formează un sistem liniar independent;*

iii) orice sistem de vectori din care se poate extrage un sistem liniar dependent este de asemenea liniar dependent.

Demonstraţie. i) Valabilitatea acestei afirmaţii rezultă din $1 \cdot \theta = \theta$.

ii) Pentru $x \neq \theta$ din $ax = \theta$, $a \in K$, rezultă $a = 0$.

iii) Dacă pentru sistemul de vectori $S = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\}$, $n > 1$, există subsistemul $\{x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\}$, $m < n$, liniar dependent, atunci există scalarii $a_1, \ldots, a_n \in K$ astfel cu $a_1x^{(1)} + a_2x^{(2)} + \ldots + a_mx^{(m)} = \theta$. De aici, avem $a_1x^{(1)} + a_2x^{(2)} + \ldots + a_mx^{(m)} + 0 \cdot x^{(m+1)} + 0 \cdot x^{(n)} = \theta$ şi deci sistemul S este liniar dependent.

Corolarul 3.3.1 *Sunt valabile afirmaţiile:*

i) Orice sistem de vectori care conţine vectorul nul este liniar dependent;

ii) Orice subsistem al unui sistem liniar independent de vectori este, de asemenea, liniar independent.

Definiţia 3.3.2 *Un sistem infinit de vectori din spaţiul vectorial V se numeşte liniar independent dacă orice subsistem finit al său este liniar independent. În caz contrar se zice că sistemul este liniar dependent.*

Exemplul 3.3.3. În spaţiul vectorial $Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sistemul $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ este liniar independent.

Într-adevăr, orice relaţie de forma

$$a_{i_1}x^{i_1} + a_{i_2}x^{i_2} + \ldots + a_{i_k}x^{i_k} = \theta, \quad (\forall)x \in \mathbb{R},$$

unde $i_1 < i_2 < \quad < i_k$, are loc numai dacă $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = a_{i_k} = 0$, adică orice subsistem finit este liniar independent.

Definiţia 3.3.3 *Un sistem B, finit sau infinit, de vectori din spaţiul vectorial V se numeşte* **bază** *pentru spaţiul vectorial V, dacă B este liniar independent şi B este un sistem de generatori pentru V.*

Exemple. 3.3.4. În spaţiul $\mathbb{R}^n$ sistemul $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$, $e^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e^{(n)} = (0, 0, \ldots, 1)$ formează o bază. S-a arătat că B este liniar independent (v.exemplul 3.3.1) şi constituie un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^n$ (v.exemplul 3.2.4).

Această bază a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte **baza canonică** sau **naturală**.

3.3.5. În spaţiul vectorial $\mathcal{P}_n$ al polinoamelor de grad cel mult n, $n \geq 1$, peste câmpul $\mathbb{R}$, o bază este dată de sistemul $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Teorema 3.3.2 *Sistemul de vectori $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$ constituie o bază pentru spaţiul vectorial V peste câmpul K, dacă şi numai dacă orice vector din V se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară de vectorii lui B.*

Demonstraţie. Dacă B este bază a spaţiului vectorial V, atunci orice $x \in V$ se scrie sub forma $x = \sum_{k=1}^{n}, a_ke^{(k)}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$. Dacă mai avem şi $x = \sum_{k=1}^{n} b_ke^{(k)}$, $b_1, \ldots, b_n \in K$, atunci obţinem $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)e^{(k)} = \theta$, de unde, folosind faptul că B este liniar independent, rezultă $a_k = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, adică scrierea lui x în baza B este unică.

Reciproc, dacă orice vector din spaţiul V se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară de vectorii lui B, atunci şi vectorul nul are această proprietate, adică din $\theta = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{(k)}$ rezultă $a_k = 0$, $k = \overline{1,n}$ (se foloseşte unicitatea scrierii), ceea ce ne arată că B este liniar independent.

Definiţia 3.3.4 *Dacă $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$ este o bază a spaţiului vectorial V peste câmpul K, atunci scalarii $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ din scrierea $x = \sum_{k=1}^{n} a_k e^k$ se numesc* **componentele** *sau* **coordonatele** *vectorului x în baza B.*

Teorema 3.3.3 *(***teorema înlocuirii a lui Steinitz.***) Dacă $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$ este o bază în spaţiul vectorial V peste câmpul K şi $x = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{(k)}$ este un vector din V ce satisface condiţia $a_t \neq 0$, atunci sistemul $B_1 = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(t-1)}, x, e^{(t+1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ este, de asemenea, o bază pentru V.*

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi că B_1 este liniar independent. Dacă $b_1 e^{(1)} + \ldots + b_{t-1} e^{(t-1)} + b_t x + b_{t+1} e^{(t+1)} + \ldots + b_n e^{(n)} = \theta$, atunci înlocuind pe x cu expresia lui, găsim:

$$(b_1 + b_t a_1) e^{(1)} + \ldots + (b_{t-1} + b_t a_{t-1}) e^{(t-1)} + b_t a_t e^{(t)} +$$
$$+ (b_{t+1} + b_t a_{t+1}) e^{(t+1)} + \ldots + (b_n + b_t a_n) e^{(n)} = \theta.$$

Cum B este bază în spaţiul vectorial V, din egalitatea precedentă rezultă:

$$b_1 + b_t a_1 = 0, \ldots, b_{t-1} + b_t a_{t-1} = 0, b_t a_t = 0, b_{t+1} + b_t a_{t+1} =$$
$$= 0, \ldots, b_n + b_t a_n = 0.$$

Deoarece $a_t \neq 0$, deducem $b_t = 0$ şi deci $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, ceea ce ne arată că B_1 este liniar independent.

Să arătăm acum că B_1 este un sistem de generatori pentru V. Fie y un vector din V, care în baza B are scrierea $y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{(k)}$. Cum $a_t \neq 0$, din scrierea lui x avem

$$e^{(t)} = a_t^{-1} (x - a_1 e^{(1)} - \ldots - a_{t-1} e^{(t-1)} - a_{t+1} e^{(t+1)} - \ldots - a_n e^{(n)}),$$

înlocuind pe $e^{(t)}$ în y, obţinem

(3.1) $y = (c_1 - a_t^{-1} a_1 c_t) e^{(1)} + \ldots + (c_{t-1} - a_t^{-1} a_{t-1} c_t) e^{(t-1)} + a_t^{-1} c_t x +$

$$+(c_{t+1} - a_t^{-1}a_{t+1}c_t)e^{(t+1)} + \ldots + (c_n - a_t^{-1}a_n c_t)e^{(n)},$$

ceea ce ne arată că B_1 este un sistem de generatori pentru V.

Observaţia 3.3.1 *Prin inducţie matematică se poate demonstra următorul rezultat (teorema generală a înlocuirii): dacă* $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$ *este o bază în spaţiul vectorial* V *peste câmpul* K *şi* $S = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}\}$ *este un sistem de vectori liniar independent din* V*, atunci* $p \leq n$ *şi putem înlocui* p *vectori din* B *prin vectorii lui* S*, astfel ca, renumerotând vectorii,* $B_1 = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(p)}, e^{(p+1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ *să fie, de asemenea, bază pentru* V*.*

Comentariul 3.3.1 *Demonstraţia Teoremei 3.3.3 ne dă şi procedeul practic de înlocuire a unui vector dintr-o bază cu un alt vector, cât şi formulele de calcul al coordonatelor unui vector în noua bază. Intr-adevăr, pentru coordonatele vectorului* $y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{(k)}$ *în noua bază* B_1 *din formula (3.1) rezultă formulele*

$$y_k = c_k - a_t^{-1}a_k c_t = \frac{c_k a_t - a_k c_t}{a_t}, \text{ pentru } k \neq t \tag{3.2}$$

şi

$$y_t = a_t^{-1}c_t = \frac{c_t}{a_t}, \text{ pentru } k = t. \tag{3.3}$$

Formulele (3.2) şi (3.3) ne dau regulile de aflare a componentelor lui y în baza B_1, în care în locul vectorului $e^{(t)}$ s-a introdus vectorul x. Formula (3.3) arată că noua componentă a vectorului y corespunzătoare vectorului x ce intră în locul lui $e^{(t)}$, se obţine prin împărţirea componentei sale c_t (de pe linia "t") la componenta a_t a lui x de pe coloana t, iar formula (3.2) indică regula: componenta nouă y_k a lui y, de pe o linie arbitrară k, se obţine din vechea componentă a_k după regula

$$\begin{matrix} a_t & & c_t \\ a_k & & c_k \end{matrix} \quad \text{echivalentă cu } \frac{a_t c_k - a_k c_t}{a_t} = y_k,$$

numită şi **regula dreptunghiului**. Elementul $a_t \neq 0$ se numeşte şi pivot, ceea ce face ca regula dreptunghiului să se mai numească şi **regula pivotului**. De obicei calculele se fac în tabele succesive de forma

Baza	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$\ldots$	$e^{(t)}$	$\ldots$	$e^{(n)}$	$\ldots$	x	y
$e^{(1)}$	1	0	$\ldots$	0	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	a_1	c_1
$e^{(2)}$	0	1	$\ldots$	0	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	a_2	c_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
$\overset{x}{\rightleftarrows} e^{(t)}$	0	0	$\ldots$	1	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	a_t	c_t
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
$e^{(k)}$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	a_k	c_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
$e^{(n)}$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$\ldots$	a_n	c_n

Exemplul 3.3.6. Fie vectorii $x = (2, 3, 1)$ şi $y = (3, 4, 5)$ scrişi în baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Scriem componentele lui y în baza $(e^{(1)}, x, e^{(3)})$.

Avem

Baza	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$	x	y
$e^{(1)}$	1	0	0	2	3
$\overset{x}{\rightleftarrows} e^{(2)}$	0	1	0	3	4
$e^{(3)}$	0	0	1	1	5
$e^{(1)}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
x	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{4}{3}$
$e^{(2)}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{11}{3}$

unde elementele de pe linia lui $e^{(2)}$ s-au împărţit cu elementul pivot 3, iar celelalte s-au calculat cu regula dreptunghiului. Pe coloana elementului pivot se pune 1 în locul elementului pivot şi în rest 0.

De reţinut că, utilizând această cale de lucru, se poate înlocui o bază a unui spaţiu vectorial cu o alta.

Exemplul 3.3.7. În $\mathbb{R}^2$ să se înlocuiască baza canonică cu baza dată de vectorii $x^{(1)} = (2, 3)$ şi $x^{(2)} = (4, 2)$ şi în noua bază să se scrie componentele vectorului $v = (3, 4)$.

Avem

Baza	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	v
$\overset{x^{(1)}}{\rightleftarrows} e^{(1)}$	1	0	2	4	3
$e^{(2)}$	0	1	3	2	4
$x^{(1)}$	$\frac{1}{2}$	0	1	2	$\frac{3}{2}$
$\overset{x^{(2)}}{\rightleftarrows} e^{(2)}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	-4	$-\frac{1}{2}$
$x^{(1)}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{5}{4}$
$x^{(2)}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{8}$

Observaţia 3.3.2 *Metoda elementului pivot este utilizată în rezolvarea multor probleme de matematică cu aplicarea în modelele matematico-economice.*

Corolarul 3.3.2 *Dacă o bază a unui spaţiu vectorial este formată din n vectori, atunci orice bază a sa are tot n vectori.*

Definiţia 3.3.5 *Dacă o bază a unui spaţiu vectorial V este formată din n vectori, atunci spunem că spaţiul V are* **dimensiune finită** *egală cu n. Scriem $dim\ V = n$. Spunem că un spaţiu vectorial are o* **dimensiune infinită** *dacă există în el o bază infinită.*

De exemplu, avem $dim\ \mathbb{R}^n = n$ şi $dim\ Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$.

Definiţia 3.3.6 *Un spaţiu vectorial V cu $dim\ V = 1$ se numeşte* **dreaptă vectorială ; un spaţiu V cu $dim\ V = 2$ se numeşte plan vectorial .**

Un subspaţiu W, cu $dim\ W = n - 1$. a unui spaţiu vectorial V, cu $dim\ V = n$, se numeşte **hiperplan vectorial**. Altfel spus, un subspaţiu vectorial W este un hiperplan vectorial dacă el este suplimentar unei drepte vectoriale.

Definiţia 3.3.7 *Se numeşte* **rangul** *unui sistem S de vectori din spaţiu vectorial V, dimensiunea spaţiului vectorial generat de S. Notăm rangul lui S prin rang S.*

Propoziţia 3.3.2 *Rangul unui sistem de vectori din spaţiul vectorial V nu se modifică dacă:*

i) se schimbă ordinea vectorilor;

ii) se înmulţeşte un vector al sistemului cu un scalar nenul;

iii) se adună la un vector al sistemului un alt vector din sistem, înmulţit cu un scalar.

Pentru demonstraţie se observă că sistemele de vectori obţinute prin transformările i)–iii) din propoziţie generează acelaşi subspaţiu vectorial şi deci are acelaşi rang. Transformările i), ii), iii) se numesc **transformări elementare**.

Teorema 3.3.4 *Rangul unui sistem finit de vectori este egal cu numărul maxim de vectori liniar independenţi ai sistemului.*

Demonstraţie. Fie $S = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}\}$ un sistem de vectori în spaţiul vectorial V şi $k \leq m$ numărul maxim de vectori liniar independenţi ai lui. Pentru comoditatea scrierii considerăm că vectorii $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ sunt liniar independenţi, ceea ce implică că ceilalţi vectori ai sistemului se vor exprima ca şi combinaţii liniare de aceştia, adică

$$x^{(k+i)} = a_{i1}x^{(1)} + a_{i2}x^{(2)} + \ldots + a_{ik}x^{(k)}, i = 1, 2, \ldots, m - k$$

Acum, adunăm în sistemul S la fiecare din vectorii $x^{(k+i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m - k$, respectiv vectorul $a_{i1}x^{(1)} + a_{i2}x^{(2)} + \ldots + a_{ik}x^{(k)}$ şi obţinem sistemul $S_1 = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \theta, \theta, \ldots, \theta\}$. După Propoziţia 3.3.2 sistemul S_1 are acelaşi rang cu sistemul S.

Dar în sistemul S_1 sistemul de vectori $\{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\}$ este o bază, ceea ce ne arată că dimensiunea lui este k. Prin urmare, rangul lui S_1 şi deci şi al lui S este k.

Definiţia 3.3.8 *Două spaţii vectoriale V şi W peste acelaşi câmp K se numesc* **izomorfe** *dacă există o aplicaţie $f : V \to W$ care să fie izomorfism faţă de operaţiile ce definesc pe V şi W structura de spaţiu vectorial.*

Teorema 3.3.5 *Printr-un izomorfism de două spaţii vectoriale se păstrează rangul unui sistem finit de vectori*

Demonstraţie. Fie $f : V \to W$ un izomorfism între spaţiile vectoriale V şi W şi $S = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}\}$ un sistem de vectori de rang k, $k \leq m$, din spaţiul vectorial V. Prin f se obţine sistemul de vectori $S_1 = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}\}$, unde $y^{(i)} = f(x^{(i)})$, $i = \overline{1, m}$, din W. Pentru comoditatea scrierii considerăm că vectorii $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ sunt liniar independenţi. Atunci din relaţia $a_1y^{(1)} + a_2y^{(2)} + \ldots + a_ky^{(k)} = \theta$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in K$, rezultă $a_1f(x^{(1)}) + a_2f(x^{(2)}) + \ldots + a_kf(x^{(k)}) = \theta$, iar de aici $f(a_1x^{(1)} + a_2x^{(2)} + \ldots + a_kx^{(k)}) = \theta$. Cum f este injectivă deducem că $a_1x^{(1)} + a_2x^{(2)} + \ldots + a_kx^{(k)} = \theta$ şi de aici $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$, ceea ce ne arată că vectorii $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$ sunt liniar independenţi.

Acum considerând relaţiile

$$x^{(k+i)} = a_{i1}x^{(1)} + a_{i2}x^{(2)} + \ldots + a_{ik}x^{(k)}, i = 1, 2, \ldots, m - r$$

şi aplicând funcţia f, obţinem

$$y^{(k+i)} = a_{i1}y^{(1)} + a_{i2}y^{(2)} + \ldots + a_{ik}y^{(k)}, i = 1, 2, \ldots, m - r.$$

Prin urmare, sistemul de vectori $y^{(1)}, \ldots, y^{(k)}$ este un sistem de generatori pentru S_1 şi deci *rang* $S_1 =$ *rang* S.

Teorema 3.3.6 *Condiţia necesară şi suficientă ca două spaţii vectoriale V şi W peste câmpul K, de dimensiune finită, să fie izomorfe este ca ele să aibă aceeaşi dimensiune.*

Demonstraţie. Necesitatea rezultă imediat aplicând Teorema 3.3.5.

Pentru suficienţă să considerăm spaţiile vectoriale V şi W cu $dim\ V = dim\ W = n$. Fie $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$ şi $B_1 = \{f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}\}$ câte o bază în V şi respectiv W. Definim, aplicaţia $h : V \to W$ după regula: pentru orice $x \in B$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{(i)}$, $h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i f^{(i)}$. Se verifică imediat că h este un izomorfism şi deci spaţiile V şi W sunt izomorfe.

Corolarul 3.3.3 *Printr-un izomorfism între două spaţii vectoriale V şi W de dimensiune finită o bază din V este dusă într-o bază din W.*

Corolarul 3.3.4 *Există un izomorfism şi numai unul între două spaţii vectoriale V şi W de dimeniune finită care să ducă o bază B din V într-o bază dată B_1 din W.*

Corolarul 3.3.5 *Orice spaţiu vectorial V peste câmpul K de dimensiune n este izomorf cu spaţiul K^n.*

Corolarul 3.3.6 *Pentru orice subspaţiu W al unui spaţiu vectorial V avem $dim\ W \leq dim\ V$.*

3.4 Produs scalar. Spaţii normate. Spaţii metrice

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K, unde $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$.

Definiţia 3.4.1 *Se numeşte produs scalar pe V, orice aplicaţie $< \cdot , \cdot >: V \times V \to K$, cu proprietăţile:*

P1. $< x, x > \geq 0$, *oricare ar fi* $x, y \in V$ *şi* $< x, x >= 0$, *dacă şi numai dacă* $x = \theta$;

P2. $< x, y >= \overline{< y, x >}$, *($\overline{z}$ este conjugatul lui z în $\mathbb{C}$), oricare ar fi* $x, y \in V$;

P3. $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$, *oricare ar fi* $\lambda \in K$ *şi* $x, y \in V$;

P4. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$, *oricare ar fi* $x, y, z \in V$.

Dacă $K = \mathbb{R}$, cum un număr real este egal cu conjugatul său rezultă că $P2$ devine $< x, y >=< y, x >$, adică produsul scalar este comutativ.

Definiţia 3.4.2 *Un spaţiu vectorial peste câmpul $K = \mathbb{R} \vee C$ înzestrat cu un produs scalar se numeşte spaţiu* **prehilbertian**. *Dacă $K = \mathbb{R}$, atunci spaţiul se numeşte* **euclidian**, *iar dacă $K = \mathbb{C}$ atunci spaţiul vectorial înzestrat cu un produs scalar se numeşte* **unitar** .

Exemple. **3.4.1.** Dacă în $\mathbb{R}^n$ considerăm vectorii $x = (x_1, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi definim $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, atunci $\mathbb{R}^n$ devine un spaţiu euclidian. Prin simple calcule se verifică proprietăţile $P_1 - P_4$.

3.4.2. În $\mathbb{C}^n$ produsul scalar al vectorilor $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ se defineşte prin

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

devenind astfel un spaţiu unitar.

3.4.3. Pe spaţiul vectorial $C[a, b]$ al funcţiilor reale continue, expresia $< f, g >= \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ este un produs scalar.

Definiţia 3.4.3 *Se numeşte* **normă** *peste spaţiul vectorial V peste $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$ orice aplicaţie $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăţi:*

N1. $\|x\| = 0$, *dacă şi numai dacă* $x = \theta$;

N2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, *oricare ar fi* $\lambda \in K$ *şi* $x \in V$;

N3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ *(inegalitatea triunghiurilor), oricare ar fi* $x, y \in V$.

Dacă în $N3$ *punem* $y = -x$, *atunci rezultă* $\|x\| \ge 0$, *pentru orice* $x \in V$.

Definiţia 3.4.4 *Un spaţiu vectorial V peste K este* **normat** *dacă pe el s-a definit o normă. Scriem $(V, \| \cdot \|)$.*

Teorema 3.4.1 *Dacă $(V, < \cdot , \cdot >)$ este un spaţiu euclidian, atunci pentru orice $x, y \in V$ are loc inegalitatea*

$$| < x, y > | \le \sqrt{< x, x > \cdot < y, y >}.$$

numită **inegalitatea lui Cauchy–Schwarz–Buniakowscki**.

Demonstraţie. Pentru orice $x, y \in V$ şi orice $\lambda \in \mathbb{R}$, avem $< x+\lambda y, x+\lambda y > \ge 0$. De aici, folosind $P2 - P4$ obţinem

$$< y, y > \lambda^2 + 2\lambda < x, y > + < x, x > \ge 0 \tag{3.4}$$

pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dacă $y = \theta$ inegalitatea (3.4) devine

$$2\lambda < x, \theta > + < x, x > \ge 0. \tag{3.5}$$

Dar $< x, \theta >=< x, x - x >=< x, x > + < x, -x >=< x, x > + < -x, x >=< x, x > - < x, x >= 0$. Cum $< x, x >\geq 0$, rezultă că (3.4) are loc pentru $y = \theta$ şi oricare ar fi $x \in V$.

Deci, putem presupune $y \neq \theta$, adică $< y, y >> 0$. Atunci trinomul de gradul doi în λ din (3.4) va fi ≥ 0, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{R}$, dacă şi numai dacă $\Delta_\lambda =< x, y >^2 - < y, y > \cdot < x, x >\leq 0$, de unde rezultă $| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x > \cdot < y, y >}$ ceea ce trebuia demonstrat.

Egalitate în inegalitatea lui Cauchy–Schwarz–Buniakowski se obţine numai dacă $x = -\lambda y$, adică vectorii x şi y sunt coliniari.

Observaţia 3.4.1 *Pentru $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vectori din $\mathbb{R}^n$ inegalitatea Cauchy–Schwarz–Buniakowski ia forma*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$

cu egalitate numai dacă $x_1/y_1 = x_2/y_2 = \ldots = x_n/y_n = \lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.4.2 *Dacă $(V, < \cdot, \cdot >)$ este un spaţiu euclidian, aplicaţia $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$, definită prin $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ este o normă pe V, numită* **norma generată de produsul scalar**.

Altfel spus, un spaţiu prehilbertian este un spaţiu normat.

Demonstraţie. Trebuiesc verificate proprietăţile normei. Din $\|x\| = 0$ avem $< x, x >= 0$, de unde, pe baza lui $P1$, deducem $x = \theta$, ceea ce ne demonstrază $N1$.

Pentru $N2$ avem $\|\lambda x\| = \sqrt{< \lambda x, \lambda x >} = \sqrt{\lambda^2 < x, x >} = |\lambda| \; \|x\|$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi orice $x \in V$.

Pentru a demonstra $N3$ putem scrie $\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >=$ $< x, x > +2 < x, y > + < y, y >\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ (s-a folosit inegalitatea lui Cauchy–Schwarz–Buniakowski), de unde rezultă $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, oricare ar fi $x, y \in V$.

Observaţia 3.4.2 *Teoremele 3.4.1 şi 3.4.2 rămân adevărate şi pentru spaţiile vectoriale unitare.*

Definiţia 3.4.5 *Fie $(V, < \cdot, \cdot >)$ un spaţiu vectorial euclidian. Oricare ar fi vectorii $x, y \in V$, diferiţi de vectorul nul, numărul real $\varphi \in [0, \pi]$ definit prin*

$$\cos \varphi = \frac{< x, y >}{\|x\| \; \cdot \; \|y\|},$$

se numeşte **unghiul dintre** x **şi** y. *Unghiul φ se notează şi prin $(\widehat{x, y})$.*

Dacă $< x, y >= 0$, atunci $\varphi = \pi/2$, iar vectorii x şi y se numesc **ortogonali**.

Un vector v se numeşte **versor** *dacă $\|v\| = 1$.*

Definiţia 3.4.6 *Fie A o mulţime nevidă. Se numeşte* **metrică (distanţă)** *pe A, orice aplicaţie $d : A \times A \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăţi:*

M_1. *$d(x, y) = 0$, dacă şi numai dacă $x = y$ (separare);*

M_2. *$d(x, y) = d(y, x)$, pentru orice $x, y \in A$ (simetrie);*

M_3. *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, pentru orice $x, y, z \in A$ (inegalitatea triunghiului).*

Definiţia 3.4.7 *Se numeşte spaţiu metric orice mulţime nevidă A înzestrată cu o metrică. Notăm cu (A, d) mulţimea A înzestrată cu metrica d.*

Observaţia 3.4.3 *Pentru orice $x, y \in (A, d)$ avem $d(x, y) \geq 0$.*

Într-adevăr, din M_3, punând $z = x$, rezultă

$$0 \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y),$$

de unde $d(x, y) \geq 0$.

Exemple. 3.4.4. Aplicaţia $d : A \times A \to \mathbb{R}$ prin $d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ este o metrică pe A, numită **metrica grosieră**.

3.4.5. Aplicaţia $d : R \times R \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ este o metrică pe $\mathbb{R}$.

Teorema 3.4.3 *Dacă $(V, \| \cdot \|)$ este un spaţiu vectorial normat, atunci aplicaţia $d : V \times V \to \mathbb{R}$ definită prin $d(x, y) = \|x - y\|$ este o metrică pe V, numită* **metrica generată de normă**.

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că d verifică proprietăţile $M_1 - M_3$. Pentru M_1 din $d(x, y) = 0$, avem $\|x - y\| = 0$, de unde, pe baza lui N_1, obţinem $x = y$. Proprietatea de simetrie $M2$ rezultă astfel:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \, \|y - x\| = d(y, x),$$

pentru orice $x, y \in V$.

Inegalitatea triunghiului pentru d rezultă astfel:

$$d(x, y) = \|x - z\| = \|x - y + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z),$$

pentru orice $x, y, z \in V$.

Observaţia 3.4.4 *Pentru spaţiile euclidiene $\mathbb{R}^n$ metrica generată de norma dată de produsul scalar conduce la*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

oricare ar fi $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ şi $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}$. numită şi **metrica euclidiană**.

3.5 Mulţimi convexe

În acest paragraf vom introduce noţiunea de mulţime convexă şi proprietăţile ei. Ea are o importanţă deosebită în rezolvarea modelelor matematico–economice de programare liniară.

Definiţia 3.5.1 *Fie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, \ldots, y_n)$ doi vectori din $\mathbb{R}^n$. Vectorul $z = ax + (1-a)y$, cu $a \in [0,1]$ se numeşte* **combinaţia liniară convexă** *a vectorilor x şi y.*

Definiţia 3.5.2 *Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$ mulţimea $\{z \in \mathbb{R}^n | z = ax+(1-a)y,\ a \in [0,1]\}$ se numeşte* **segmentul de dreaptă de extremităţi** *x* **şi** *y. El se notează cu $[x,y]$. Dacă $a \in (0,1)$, atunci segmentul deschis dat de x şi y se notează cu (x,y).*

Pe $\mathbb{R}$ segmentul $[x,y]$ şi segmentul deschis (x,y) coincid cu intervalul închis $[x,y]$ respectiv intervalul deschis (x,y)

Definiţia 3.5.3 *O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte* **mulţime convexă**, *dacă oricare ar fi $x, y \in A$ avem $[x,y] \subseteq A$. Altfel spus, oricare ar fi două puncte din A, segmentul $[x,y]$ este o mulţime din A.*

Exemple. 3.5.1. Fie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector fixat din $\mathbb{R}^n$ şi b un număr real dat. Mulţimea $H = \{x \in \mathbb{R}^n | <a,x>= b\}$ este convexă.

Fie $\lambda \in [0,1]$. Pentru orice $x, y \in H$ avem

$$< a, \lambda x + (1-\lambda)y >= \lambda < a, x > +(1-\lambda) < a, y >= \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

ceea ce ne arată că $[x,y] \subseteq H$.

Mulţimea H este un hiperplan în $\mathbb{R}^n$ de ecuaţie $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$, dacă $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

3.5.2. În ipotezele de la 3.5.1, mulţimile $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | < a, x >\leq b\}$ şi $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | < a, x >\geq b\}$, numite şi semispaţiile determinate de hiperplanul H, sunt mulţimi convexe.

3.5.3. Mulţimile

$$M_{a,b} = \{z \in \mathbb{R}^n | z = ax + by, x, y \in \mathbb{R}^n, a, b \geq 0\}$$

sunt convexe. Ele sunt numite şi **conuri convexe**.

3.5.4. Mulţimea $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n | ax \leq 0, a \in \mathbb{R}^n$, fixat $\}$ este un con convex, în timp ce S_1 şi S_2, cu $b \neq 0$, din exemplul 3.5.2 nu sunt conuri convexe.

Propoziţia 3.5.1 *Intersecţia a două mulţimi convexe este o mulţime convexă.*

Demonstraţie. Fie A şi B două mulţimi convexe din $\mathbb{R}^n$. Pentru orice $\lambda \in [0,1]$ şi $x, y \in A \cap B$ avem $\lambda x + (1-\lambda)y \in A \cap B$.

Propoziţia 3.5.1 rămâne valabilă pentru orice familie numărabilă de mulţimi convexe.

Definiţia 3.5.4 *Mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte con poliedral convex, dacă oricare ar fi $x \in A$ se poate scrie ca o combinaţie liniară nenegativă de un număr finit de elemente $x^{(i)} \in A$, adică*

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i x^{(i)}, a_i \geq 0, i = \overline{1,k}$$

Orice subspaţiu a lui $\mathbb{R}^n$ este un con poliedral convex.

Definiţia 3.5.5 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime. Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare convexe de elemente din A se numeşte* **acoperirea convexă** *a lui A. Ea se notează prin $Co(A)$.*

Propoziţia 3.5.2 *$Co(A)$ este convexă şi $A \subseteq Co(A)$. Dacă A este convexă, atunci $Co(A) = A$.*

Demonstraţia propoziţiei este imediată.

Definiţia 3.5.6 *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime convexă, atunci elementul $x^{(0)} \in A$ se numeşte* **punct extremal** *pentru A dacă nu există $x, y \in A$, $a \in (0,1)$ aşa încât să avem $x^{(0)} = ax + (1-a)y$, adică $x^{(0)}$ nu poate fi interior segmentului $[x, y]$, oricare ar fi $x, y \in A$.*

Exemple. 3.5.5. Vârfurile unui triunghi sunt punctele sale extremale.
3.5.6. Un subspaţiu liniar W a lui $\mathbb{R}^n$ nu are puncte extremale.

3.6 Probleme

1. Arătaţi că mulţimea $M_{m\times n}(K)$ a matricelor cu elemente din câmpul K este un spaţiu vectorial peste câmpul K.

2. Arătaţi că mulţimea soluţiilor unui sistem liniar şi omogen cu coeficienţi $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, formează un spaţiu vectorial.

3. i) Arătaţi că $Hom\ ([a,b], \mathbb{R}) = \{f | f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ funcţie }\}$ formează un spaţiu vectorial faţă de operaţiile de adunare şi înmulţire cu un scalar al funcţiilor.

ii) Demonstraţi că mulţimea $C[a,b]$ a funcţiilor reale continue pe $[a,b]$ este un subspaţiu vectorial al spaţiilor $Hom\ ([a,b], \mathbb{R})$.

4. Arătaţi mulţimea Π_n a polinoamelor de grad cel mult n, $n \in \mathbb{N}$, formează un subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $Hom\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5. Fie $(V, < \cdot\ ,\ \cdot >)$ un spaţiu vectorial prehilbertian. Arătaţi că orice sistem $S = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\}$ de vectori ortogonali doi câte doi este liniar independent.

6. Arătaţi că mulţimea vectorilor $x \in \mathbb{R}^n$ cu coordonate întregi este un

subspaţiu al lui $\mathbb{R}^n$.

7. Arătaţi că mulţimea $T = \{x \in \mathbb{R}^n | x = (x_1, \ldots, x_n), \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ este un subspaţiu vectorial pentru $\mathbb{R}^n$.

8. Arătaţi că vectorii $x^{(1)} = (1, 2, 1)$, $x^{(2)} = (1, 1, 2)$, $x^{(3)} = (1, 2, 3)$ din $\mathbb{R}^3$ fomează o bază a lui $\mathbb{R}^3$. Găsiţi coordonatele vectorului $x = (6, 5, 7)$ în baza dată de $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ şi $x^{(3)}$.

9. Acelaşi enunţ ca la 8. pentru vectorii $x^{(1)} = (2, 1, -3)$, $x^{(2)} = (3, 2, -5)$, $x^{(3)} = (1, -1, 1)$ şi $x = (6, 2, -7)$.

10. Arătaţi că mulţimile de vectori

$$B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}, e^{(1)} = (1, 2, 1), e^{(2)} = (2, 3, 3), e^{(3)} = (3, 7, 1)$$

şi

$$B_1 = \{f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}\}, f^{(1)} = (3, 1, 4), f^{(2)} = (5, 2, 1), f^{(3)} = (1, 1, -6)$$

sunt baze în $\mathbb{R}^3$. Aflaţi coordonatele vectorului $x = (2, 3, 4)$ în B, B_1 şi $B_2 = \{e^{(1)}, f^{(1)}, f^{(2)}\}$.

11. În spaţiu $\mathbb{R}^4$ înlocuiţi baza canonică prin baza dată de vectorii $x^{(1)} = (2, 1, 1, 1)$, $x^{(2)} = (1, 2, 1, 1)$, $x^{(3)} = (1, 1, 2, 1)$, $x^{(4)} = (1, 1, 1, 2)$ şi aflaţi coordonatele vectorului $x = (2, 3, 4, 1)$ în noua bază.

12. Găsiţi rangul sistemelor de vectori:

i) $S = \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\}$, unde $a^{(1)} = (1, 2, 1)$, $a^{(2)} = (1, 1, -1)$ şi $a^{(3)} = (1, 3, 3)$;

II) $S = \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}\}$, unde $a^{(1)} = (1, 0, 0, -1)$, $a^{(2)} = (2, 1, 1, 0)$, $a^{(3)} = (1, 1, 1, 1)$, $a^{(4)} = (1, 2, 3, 4)$.

13. Arătaţi că pe spaţiul vectorial $C[a, b]$ al funcţiilor continue expresia $< f, g >= \int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx$, unde $p \in C[a, b]$, $p \geq 0$, este un produs scalar.

14. Fie $C[-1, 1]$ spaţiul prehilbertian al funcţiilor continue înzestrat cu produsul scalar

$$< f, g >= \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Arătaţi că pe subspaţiul Π_n al polinoamelor de grad cel mult n, mulţimea $B = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$, definită prin recurenţă

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = 1, (n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

este o bază ortogonală. Polinoamele $P_0(x), P_1(x), \ldots$, se numesc polinoamele lui Legendre. Se poate arăta că ele sunt date de formula

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n},$$

numită formula lui Rodrigues.

15. Polinoamele definite prin $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $Q_{n+1}(x) = 2xQ_n(x) - Q_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ sunt numite polinoamele lui Cebîşev. Arătaţi că polinoamele lui Cebîşev formează o bază ortogonală pentru spaţiul prehilbertian al polinoamelor înzestrat cu produsul scalar dat în problema 13, cu $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $x \in [-1, 1]$.

16. Fie $S = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}\}$ un sistem de vectori ortogonali dintr-un spaţiu euclidian. Atunci

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} x^{(i)}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x^{(i)}\|.$$

Acest rezultat poartă numele de teorema lui Pitagora.

17. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă. Arătaţi că oricare ar fi vectorii $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)} \in A$ şi oricare ar fi numerele nenegative a_i, $i = \overline{1, n}$, care verifică condiţia $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. atunci $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x^{(i)} \in A$.

18. Vectorii $\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$. Ce componentă are vectorul $x = 2x^{(1)} + 3x^{(3)}$ în această bază? Dar în baza $\{x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(1)}\}$?

19. Fie sistemul de vectori $S = \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)}\}$, unde: $x^{(1)} = (2, 1, 3)$, $x^{(2)} = (1, 1, -1)$, $x^{(3)} = (2, 3, -8)$, $x^{(4)} = (3, 5, -6)$, $x^{(5)} = (5, 2, 2)$, $x^{(6)} = (1, 2, -7)$.

i) Utilizând metoda elementului pivot, cercetaţi dacă S este un sistem liniar dependent sau independent.

ii) Precizaţi o bază B pentru spaţiul generat de S.

iii) Pentru vectorii $S - B$, determinaţi componentele în raport cu baza B.

20. În $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii $x^{(1)} = (3, 2, 2)$, $x^{(2)} = (2, 1, 1)$, $x^{(3)} = (4, 3, 4)$, $b^{(1)} = (0, 1, 2)$, $b^{(2)} = (-1, 2, 1)$, $b^{(3)} = (3, 0, 1)$. În baza $B = \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$ un vector $x \in \mathbb{R}^3$ are componentele $(2, 6, -4)$. Se cer componentele lui x în bazele $B_1 = \{x^{(1)}, x^{(2)}, b^{(3)}\}$, $B_2 = \{x^{(1)}, b^{(2)}, x^{(3)}\}$ şi $B_3 = \{b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}\}$.

21. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$. Se zice că normele $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ definite pe V sunt echivalente dacă există $a > 0$ şi $b > 0$ aşa încât

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x_1\|,$$

pentru orice $x \in V$.

Arătaţi că echivalenţa normelor este o relaţie de echivalenţă în mulţimea normelor definite pe V.

22. Fie $\mathbb{C} = \{z|z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ spaţiul vectorial al numerelor complexe peste câmpul $\mathbb{R}$. Arătaţi că aplicaţia $\| \cdot \| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\|z\| = |z|$, oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$, este o normă pe $\mathbb{C}$.

23. Fie spaţiu vectorial $\mathbb{R}^n$ peste $\mathbb{R}$, cu $n > 1$. Arătaţi că aplicaţiile $\| \cdot \|_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pentru $k = \overline{1,3}$, definită prin

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \|x\|_3 = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|,$$

unde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sunt norme pe $\mathbb{R}^n$ şi sunt echivalente.

Indicaţie. Se arată că

$$\frac{1}{n}\| \cdot \|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\| \cdot \|_2 \leq \| \cdot \|_3 \leq \| \cdot \|_2 \leq \| \cdot \|_1.$$

24. Fie $C_{[0,1]}$ spaţiul vectorial al funcţiilor reale continue peste câmpul $\mathbb{R}$. Să se arate că aplicaţiile $\| \cdot \|_i : C_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, definite prin

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad \|f\|_3 = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

sunt norme pe $C_{[0,1]}$ şi $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_3$, pentru orice $f \in C_{[0,1]}$.

25. Fie A o mulţime nevidă şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie injectivă. Să se arate că aplicaţia $d : A \times A \to \mathbb{R}$, definită prin $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ este o metrică pe A.

26. Se consideră aplicaţia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $d(x, y) = |arctg\ x - arctg\ y|$. Arătaţi că d este o metrică pe $\mathbb{R}$.

26. Fie (V, d_1), (W, d_2) două spaţii metrice, $Z = V \times W$, $z_1 = (x_1, y_1) \in Z$, $z_2 = (x_2, y_2) \in Z$. Definim aplicaţia $d : Z \times Z \to \mathbb{R}$, $d(z_1, z_2) = [d_1^2(x_1, x_2) + d_2^2(y_1, y_2)]^{1/2}$. Arătaţi că (Z, d) este un spaţiu metric.

28. Cercetaţi dacă funcţiile $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite mai jos pot fi distanţe pe $\mathbb{R}$ sau nu

a) $d(x, y) = \min(|x|, |y|)$;

b) $d(x, y) = |x - y|/(1 + |x - y|)$;

c) $d(x, y) = [|x|^p + |y|^p]^{1/p}$, $p \geq 1$.

3.7 Testul Nr. 2 de verificare a cunoştinţelor

1. Definiţi următoarele noţiuni:

    a) Spaţiu vectorial;

    b) Acoperirea liniară;

    c) Bază a a unui spaţiu vectorial;

    d) Produs scalar;

    e) Normă;

    f) Metrică;

    g) Combinaţie liniară convexă;

    h) Mulţime convexă.

2. Arătaţi că dacă $(K, +, \cdot)$ este corp comutativ şi $n \in \mathbb{N}$, iar $K^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \mid x_i \in K,\ i = \overline{1,n}\}$, pentru $n \geq 1$, atunci mulţimea K^n înzestrată cu operaţiile

$$x + y \underline{\underline{\mathrm{def}}} (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$
$$\alpha \cdot x \underline{\underline{\mathrm{def}}} (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)\ , \qquad \alpha \in K$$

   este un spaţiu vectorial peste K.

3. Arătaţi că $B = \{v, u, w\}$, $v = (2, 1, -1)$, $u = (1, -1, 1)$ şi $w = (1, 2, -1)$ este o bază în $\mathbb{R}^3$ şi să se afle coordonatele vectorului $t = (3, 6, 1)$ în această bază.

4. Fie în $\mathbb{R}^4$ baza $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ cu $x_1 = (1, 1, 2, 1)$, $x_2 = (1, -1, 0, 1)$, $x_3 = (0, 0, -1, 1)$, şi $x_4 = (1, 2, 2, 0)$. Vectorul v are coordonatele $(1, 2, 2, 1)$ în această bază. Găsiţi coordonatele lui v în baza $B' = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ cu $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4$ şi $y_4 = x_4$.

5. Fie în $\mathbb{R}^3$ baza $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ cu $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (2, 1, 0)$, $x_3 = (-3, 2, 1)$ şi vectorul $v = -8x_1 + 4x_2 - x_3$. Găsiţi coordonatele vectorului v în baza $B' = \{y_1, y_2, y_3\}$, cu $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_2 - x_3$ şi $y_3 = x_1 - x_2 + x_3$.

6. Arătţi că $(\mathbb{R}^n, d)$ unde $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$, $x = (x_1, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, ..., y_n)$ este spaţiu metric.

7. Arătaţi că aplicaţia $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $< x, y >= 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$, $x = (x_1, x_2)$ şi $y = (y_1, y_2)$, este un produs scalar.

8. Să se arate că într-un spaţiu prehilbertian real oarecare are loc pentru orice vectori x şi y egalitatea: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

9. Demonstraţi că orice spaţiu prehilbertian real X este şi spaţiu normat.

10. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Arătaţi că $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ este o mulţime convexă.

Capitolul 4

Matrice. Determinanţi. Sisteme de ecuaţii liniare

"Viaţa este dimineaţa altfel decât seara, iarna altfel decât vara şi, în tinereţe, probabil, altfel decât la bătrâneţe"

(Remarque)

În rezolvarea multor modele matematico–economice intervin matricele şi determinanţii. Capitolul de faţă va aborda noţiunile de matrice şi determinanţi împreună cu proprietăţile lor şi aplicarea la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare.

4.1 Matrice

Definiţia 4.1.1 *Se numeşte matrice de tipul $m \times n$ peste un câmp K un tablou dreptunghiular A format din $m \times n$ elemente din K situate pe m linii şi n coloane.*

Scriem

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sau condensat

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}},$$

unde a_{ij} reprezintă elementul matricei situat pe linia i şi coloana j.

Elementele $a_{11}, a_{22}, \ldots$ formează **diagonala principală** a matricei, iar elementele $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots$ **diagonala secundară**.

Notăm cu $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ mulţimea matricelor de tipul $m \times n$ peste câmpul K, iar cu $\mathcal{M}(K)$ mulţimea tuturor matricelor peste câmpul K. Dacă $m = n$, matricele se numesc **pătratice** de ordin n.

Dacă $m = 1$, matricea se numeşte **matrice** sau **vector linie**. Dacă $n = 1$, matricea se numeşte **matrice** sau **matrice coloană**.

Unei matrice A de tip $m \times n$ i se poate ataă sistemul ordonat de m vectori linie din K^n dat de

$$L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), i = \overline{1, m}$$

şi sistemul ordonat de n vectori coloană

$$C_j = {}^t(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}), j = \overline{1, n}.$$

Definiţia 4.1.2 *Două matrice de acelaşi tip sunt egale dacă elementele corespunzătoare sunt egale.*

Definiţia 4.1.3 *Se numeşte suma matricelor $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$, ambele de tipul $m\times n$ peste K, matricea notată cu $A+B$ dată de regula $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$. Operaţia care realizează această regulă se numeşte* **adunarea matricelor***.*

Matricea $O \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cu toate elementele nule se numeşte **matricea nulă***. Fiind dată matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, matricea $-A = (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se numeşte* **opusa** *lui A.*

Se verifică imediat că $(\mathcal{M}_{m\times n}(K), +)$ este un grup comutativ.

Definiţia 4.1.4 *Se numeşte* **produsul** *matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cu scalarul $\alpha \in K$, matricea notată αA, obţinută prin regula $\alpha A = (\alpha a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Operaţia dată de această regulă se numeşte* **înmulţirea cu un scalar a matricelor***.*

Înmulţirea cu un scalar a matricelor verifică proprietăţile evidente

$$1 \cdot A = A, \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$$

oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$ şi $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Rezultă că are loc propoziţia:

Propoziţia 4.1.1 *Mulţimea matricelor $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ în raport cu operaţiile de adunare şi de înmulţire cu un scalar are o structură de spaţiu vectorial peste K.*

Dimensiunea spaţiului vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ este mn. Într-adevăr se observă că orice $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ se scrie în mod unic sub forma

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E^{(ij)},$$

unde $E^{(ij)}$ sunt matricele de tipul $m\times n$, care au toate elementele egale cu 0, în afară de cel de pe linia i şi coloana j care este egal cu 1.

Definiţia 4.1.5 *Se numeşte* **transpunere** *în mulţimea $\mathcal{M}(K)$ a matricelor peste K, aplicaţia $t:\mathcal{M}(K)\to\mathcal{M}(K)$, definită prin $t(A)={}^tA$, unde $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, iar ${}^tA=(a_{ji})\in\mathcal{M}_{n\times m}(K)$. Matricea ${}^tA$ se numeşte* **transpusa** *lui A.*

Se observă uşor că transpusa este o funcţie bijectivă, care verifică proprietăţile: 1) ${}^t({}^tA)=A$; 2) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$ şi 3) ${}^t(\alpha A)=\alpha\,{}^tA$, oricare ar fi $A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ şi $\alpha\in K$. De aici rezultă că transpunerea este un izomorfism între spaţiile vectoriale $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ şi $\mathcal{M}_{n\times m}(K)$.

Definiţia 4.1.6 *O matrice pătratică $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times n}(K)$ se numeşte* **simetrică** *dacă $A={}^tA$, adică elementele simetrice faţă de diagonala principală sunt egale $a_{ij}=a_{ji}$, $i,j=\overline{1,n}$.*

Definiţia 4.1.7 *O matrice pătratică $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ e numeşte* **antisimetrică** *dacă $A=-{}^tA$, adică elementele simetrice faţă de diagonala principală sunt opuse $a_{ij}=-a_{ji}$ $i,j=\overline{1,n}$.*

Definiţia 4.1.8 *O matrice pătratică se numeşte* **triunghiulară superioară** *respectiv* **inferioară** *dacă toate elementele situate dedesuptul, respectiv deasupra diagonalei principale sunt nule.*

Definiţia 4.1.9 *O matrice pătratică se numeşte* **diagonală** *dacă toate elementele ei sunt nule cu excepţia celor de pe diagonala principală.*

Teorema 4.1.1 Teorema rangului. *Pentru o matrice rangul sistemului de vectori linie este egal cu rangul sistemului de vectori coloană.*

Demonstraţie. Fie $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ şi r şi p rangurile sistemelor de vectori linie $L_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$, $i=\overline{1,m}$ şi coloană $C_j=(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj})$, $j=\overline{1,n}$. Nu restrângem generalitatea, dacă presupunem că primele r linii sunt liniare independente, deoarece o schimbare a ordinii liniilor păstrează rangul sistemului vectorilor linie. O astfel de schimbare modifică vectorii coloană. Fiecare vector coloană se scrie

$$C_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e^{(i)},$$

unde $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}\}$ este baza canonică din K^m, este dus în vectorul

$$C'_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f^{(i)},$$

unde $B_1 = \{f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}\}$ este noua bază din K^m, obţinută din B prin schimbarea ordinii vectorilor ei, corespunzătoare schimbării liniilor matricei A. Considerăm, acum, automorfismul spaţiului K^m, care duce baza B în baza B_1, acesta ducând vectorii C_j în vectorii C'_j şi deci păstrează rangul sistemului format de ei. Celelalte linii ale matricei A se vor exprima ca şi combinaţii liniare de primele r, adică putem scrie

$$L_{r+s} = \alpha_{r+s,1} L_1 + \alpha_{r+s,2} L_2 + \ldots + \alpha_{r+s,r} L_r, s = 1, 2, \ldots, m - r,$$

de unde, folosind egalitatea vectorilor în K^n, rezultă

$$a_{r+s,j} = \alpha_{r+s,1} a_{1j} + \alpha_{r+s,2} a_{2j} + \ldots + \alpha_{r+n,r} a_{rj}, j = 1, \ldots, n.$$

Înlocuind în expresiile coloanelor C_j, obţinem

$$C_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} e^{(i)} + \sum_{s=1}^{m-r} a_{r+s,j} e^{(r+s)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_{ij} e^{(i)} + \sum_{s=1}^{m-r} (\alpha_{r+s,1} a_{1j} + \alpha_{r+s,2} a_{2j} + \ldots + \alpha_{r+s,r} a_{rj}) e^{(r+s)}, j = \overline{1,n}.$$

Cum coeficienţii $\alpha_{r+s,j}$, $j = \overline{1,n}$ sunt independenţi de ordinea liniilor, grupând termenii care conţin pe a_{ij}, obţinem

$$C_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} \left(e^{(i)} + \sum_{s=1}^{m-r} \alpha_{r+s,i} e^{(r+s)} \right), j = \overline{1,n}.$$

Punând $g^{(i)} = e^{(i)} + \sum_{s=1}^{m-r} \alpha_{r+s,i} e^{(r+s)}$, $i = \overline{1,r}$, rezultă

$$C_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} g^{(i)}, j = \overline{1,n}.$$

Am dedus că cei n vectori coloană se exprimă ca şi combinaţii liniare de r vectori $g^{(i)}$ din K^m, iar rangul p al sistemului format de ei este cel mult egal cu numărul generatorilor $g^{(i)}$, deci $p \leq r$.

Dacă acum schimbăm rolul coloanelor şi liniilor şi facem acelaşi raţionament, obţinem $r \leq p$. Din $p \leq r$ şi $r \leq p$ rezultă $r = p$, ceea ce trebuia demonstrat.

Definiţia 4.1.10 *Rangul comun al sistemelor de vectori linii sau coloane a unei matrice se numeşte* **rangul** *ei.*

Altfel spus, rangul unei matrice este egal cu numărul maxim de linii sau coloane liniar independent, între ele.

Propoziţia 4.1.2 *Rangul unei matrici este egal cu rangul transpusei sale.*

Demonstraţie. Deoarece prin transpunere sistemul de vectori linie al unei matrici devine sistemul de vectori coloană al transpusei matricei, din teorema rangului rezultă că matricea şi transpusa ei au acelaşi rang.

Observaţia 4.1.1 *Prin transformări elementare aplicate sistemului de vectori linie sau coloane, rangul unei matrice nu se modifică.*

Valabilitatea acestei observaţii rezultă din teorema rangului şi din faptul că prin efectuarea unor transformări elementare rangul unui sistem de vectori nu se modifică (v.3.3).

Propoziţia 4.1.3 *Prin transformări elementare asupra liniilor şi coloanelor, orice matrice A poate fi transformată într-o matrice B, având toate elementele nule cu excepţia primelor r elemente de pe diagonala principală, care să fie egale cu* 1*. Matricea A are atunci rangul r.*

Demonstraţie. Considerăm matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dacă A este matricea nulă, atunci afirmaţia propoziţiei este dovedită. Dacă nu, atunci putem presupune că $a_{11} \neq 0$ (în caz că $a_{11} = 0$ se fac schimbări ale ordinii liniilor sau coloanelor). Pentru a obţine 1 pe poziţia lui a_{11} înmulţim prima linie cu a_{11}^{-1}. Pentru a avea 0 pe poziţia a_{i1}, $i = \overline{2,m}$, înmulţim acum linia întâi cu $-a_{i1}$. Elementul a_{ij} se înlocuieşte cu

$$a_{ij} - a_{11}^{-1} a_{1j} a_{i1} = \frac{a_{11}a_{ij} - a_{1j}a_{i1}}{a_n}, i = \overline{2,m}, j = \overline{2,n},$$

în care se recunoaşte regula de calcul a dreptunghiului sau elementului pivot.

Aplicând repetat acest procedeu, după un număr finit de paşi, ajungem că A este echivalentă ($\sim$) din punctul de vedere al rangului cu matricea

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{linia } r \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

şi deci rangul lui A este r, dat de numărul de cifre 1 din B.

Demonstraţia acestei propoziţii ne dă şi procedeul practic de aflare a rangului unei matrice, calculele făcându-se cu cunoscuta regulă a dreptunghiului.

Exemplul 4.1.1. Să se afle rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -5 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Schimbând coloana 1 cu coloana 2 şi înmulţind coloana 5 cu $1/3$ obţinem

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Înmulţim prima linie cu $1/2$, apoi pe linia întâi şi coloana întâi completăm cu 0, iar restul elementelor le calculăm cu regula dreptunghiului, obţinând

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicând succesiv acelaşi procedeu avem:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

şi deci rang $A = 3$.

Definiţia 4.1.11 *O matrice pătratică de ordin n se numeşte* **nesingulară** *sau* **regulată** *dacă rangul ei este egal cu n. În caz contrar, adică dacă rangul ei este mai mic ca n, atunci matricea se numeşte* **singulară**.

Definiţia 4.1.12 *Se numeşte matrice* **extrasă** *dintr-o matrice A orice matrice B obţinută din A înlăturând anumite linii şi coloane, păstrând ordinea liniilor şi coloanelor rămase.*

Teorema 4.1.2 *Rangul unei matrice este egal cu ordinul maxim al matricelor pătratice nesingulare extrase din ea.*

Demonstraţie. Fie A o matrice, r rangul ei şi B o matrice pătratică nesingulară extrasă din A şi de rang maxim p. Cele p linii ale matricei A care intervin în B sunt liniar independente, deoarece dependenţa liniară a acestor linii în A ar atrage dependenţa lor liniară şi în B, ceea ce ar face ca B să fie singulară. Prin urmare $p \leq r$. Acum să arătăm că oricare $p+1$ linii din A sunt liniar independente. Să admitem că există în A $(p+1)$ linii liniar independente, atunci, extrăgând din A matricea formată din ele, am obţine o matrice C de rang $(p+1)$. Pe baza teoremei rangului, matricea C are şi $p+1$ coloane liniar independente. Acum extrăgând din C (deci şi din A) matricea D formată din cele $p+1$ coloane liniar independente, obţinem o matrice nesingulară de ordin $p+1$, ceea ce ar contrazice alegerea lui p. Rezultă că $r < p+1$ şi cum am arătat că $p \leq r$, deducem că $r = p$.

Să introducem acum pe mulţimea $\mathcal{M}(K)$ a matricelor operaţia de înmulţire.

Definiţia 4.1.13 *Se numeşte* **produsul** *matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ cu matricea $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$, matricea $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$, unde*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p}.$$

Scriem $C = A \cdot B$. Operaţia care realizează acest proces se numeşte **înmulţirea matricelor**.

Propoziţia 4.1.4 *Înmulţirea matricelor, când are sens, este asociativă.*

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$, $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{p\times q}(K)$. Avem

$$A(BC) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left[\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right]\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right) =$$
$$= \left(\sum_{l=1}^{p}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right] c_{lj}\right) = (AB)C.$$

Propoziţia 4.1.5 *Înmulţirea matricelor este distributivă faţă de adunarea lor.*

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$ şi $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$. Avem

$$A[B+C] = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}[b_{kj} + c_{kj}]\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right) = AB + AC,$$

adică înmulţirea este distributivă la stânga faţă de adunare. În mod analog, se demonstrează şi distributivitatea la dreapta.

Definiţia 4.1.14 *Matricea pătratică* $I_n = (\delta_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, *unde*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \quad i, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

este **simbolul lui Kronecker**, *se numeşte* **matricea unitate de ordinul** n.

Altfel spus, matricea I_n este o matrice diagonală cu toate elementele de pe diagonala principală egale cu 1. Când nu dorim să precizăm ordinul matricei unitate o vom nota prin I.

Observaţia 4.1.2 *Pentru orice matrice* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *avem*

$$I_m A = A \quad \text{şi} \quad AI_n = A.$$

Observaţia 4.1.3 *Înmulţirea matricelor, în general. nu este comutativă.*

Din proprietăţile adunării şi înmulţirii rezultă:

Propoziţia 4.1.6 *Mulţimea* $\mathcal{M}_{n^2}(K)$ *a matricelor pătratice de acelaşi ordin* n *înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire are o structură de inel cu divizori ai lui zero.*

Propoziţia 4.1.7 *Transpusa unui produs de două matrice este egală cu produsul transpuselor în ordine inversă.*

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ şi $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$. Avem

$$^t(AB) = {}^t\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}\right) = {}^tB\,{}^tA.$$

Rezultatul obţinut se poate extinde prin inducţie matematică la un produs cu un număr finit de factori.

Definiţia 4.1.15 *Se numeşte* **inversa** *matricei pătratice A, matricea notată cu A^{-1}, care satisface condiţiile $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.*

Teorema 4.1.3 *Condiţia necesară şi suficientă ca o matrice pătratică să aibă inversă este ca ea să fie nesingulară.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem că matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ are o inversă pe $A^{-1} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$. Din $A^{-1}A = I$ rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = \delta_{ij}, i, j = \overline{1, n}.$$

de unde, pentru vectorii $e^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$ ai bazei canonice obţinem exprimarea

$$e^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}L_k, \tag{4.1}$$

L_k, $k = \overline{1, n}$, fiind vectorii linie ai matricei A. Cum pentru orice $x \in K^n$ avem $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{(i)}$, înlocuind $e^{(i)}$ din relaţiile (4.1) deducem că orice vector $x \in K^n$ se exprimă ca o combinaţie liniară de vectori linie L_k, $k = \overline{1, n}$. Rezultă că sistemul de vectori linie L_k, $k = \overline{1, n}$, generează spaţiul K^n, ceea ce înseamnă că are rangul n şi deci matricea A este nesingulară.

Suficienţa. Din faptul că A este nesingulară, rezultă că vectorii linie L_k, $k = \overline{1, n}$, sunt liniar independenţi şi deci formează o bază în K^n. Exprimăm vectorii $e^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, ai bazei canonice în baza dată de vectorii linie şi avem

$$e^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}L_k, i = \overline{1, n},$$

de unde, punând $B = (b_{ik})$, obţinem $BA = I$.

Matricea A fiind nesingulară are şi vectorii coloană liniar independenţi, formând şi ei o bază în K^n, şi deci putem scrie $AC = I$. Acum obţinem

$$C = IC = (BA)C = B(AC) = BI = B,$$

de unde $C = B = A^{-1}$ şi prin urmare matricea A are inversă.

Uşor se arată că inversa unei matrice este unică şi că ea este nesingulară.

Propoziţia 4.1.8 *Produsul a două matrice nesingulare este o matrice nesingulară şi inversa ei este egală cu produsul inverselor luate în ordine schimbată*

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Demonstraţie. Avem

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

şi

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I,$$

relaţii ce demonstrează afirmaţiile din enunţ.

Rezultatul se extinde prin inducţie matematică la un produs de matrice nesingulare cu un număr finit de factori.

Pentru aflarea inversei unei matrice se foloseşte transformarea ei în matrice unitate, aplicând regula dreptunghiului, după schema

$$(A|I) \Longrightarrow (A^{-1}A|A^{-1}I) \Longrightarrow (I|A^{-1}).$$

Exemplul 4.1.2. Pentru a afla inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

procedăm astfel

$$(A|I_3) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Prin urmare, avem

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se poate lucra utilizând regula dreptunghiului fără a împărţi la pivot şi transformând matricea $(A|I)$ extinsă aşa încât să ajungem la situaţia $(D|C)$, unde D este matricea diagonală

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{iar } C = (c_{ij}), i, j = \overline{1, n}.$$

Pentru a afla inversa A^{-1} împărţim liniile $L_1, L_2, \dots, L_n$ ale matricei C respectiv la: $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, $a_{22}\dots a_{nn}, \dots, a_{nn}$.

Exemplul 4.1.3. Pentru a afla inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

procedăm astfel

$$(A|I_3) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 14 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -12 & 60 & -84 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & -6 & 30 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

de unde

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{2\cdot3\cdot12} & \frac{60}{2\cdot3\cdot12} & \frac{-84}{2\cdot3\cdot12} \\ \frac{-6}{3\cdot12} & \frac{-6}{3\cdot12} & \frac{30}{3\cdot12} \\ \frac{6}{12} & -\frac{6}{12} & \frac{6}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Definiţia 4.1.16 *O matrice pătratică A se numeşte* **ortogonală** *dacă* ${}^tA \cdot A = I$.

Propoziţia 4.1.9 *Condiţia necesară si suficientă ca o matrice pătratică să fie ortogonală este ca ea să fie nesingulară, iar transpusa şi inversa ei să fie egale.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Din ${}^tA \cdot A = I$ rezultă că A este nesingulară şi, înmulţind această egalitate la dreapta cu A^{-1}, obţinem ${}^tA = A^{-1}$.

Suficienţa. Dacă A este nesingulară şi verifică ${}^tA = A^{-1}$, atunci, prin înmulţire la dreapta cu A, găsim ${}^tA \cdot A = I$, ceea ce ne arată că A este ortogonală.

Teorema 4.1.4 *Rangul unui produs de matrice nu depăşeşte rangul fiecăruia din factorii săi.*

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}$ şi $C = A\cdot B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times p}$, unde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p}.$$

Ultimele relaţii ne arată că liniile matricei C se exprimă ca şi combinaţii liniare de liniile matricei B şi deci subspaţiul generat de liniile matricei C sunt incluse în subspaţiul generat de liniile matricei B. Aşadar, avem $rang\ C \leq rang\ B$ În mod analog, raţionând cu vectorii coloană, obţinem $rang\ C \leq rang\ A$.

Dacă unul din factorii produsului este o matrice nesingulară, atunci avem un rezultat mai precis.

Teorema 4.1.5 *Rangul produsului dintre o matrice A şi o matrice nesingulară B este egal cu rangul lui A.*

Demonstraţie. Fie $C = AB$. Din Teorema 4.1.4 avem $rang\ C \leq rang\ A$. Ţinând seama că B este nesingulară, există B^{-1} şi înmulţind la dreapta cu B^{-1} în $C = AB$, obţinem $A = CB^{-1}$. Aplicând din nou Teorema 4.1.4, rezultă $rang\ A \leq rang\ C$. Din $rang\ C \leq rang\ A$ şi $rang\ A \leq rang\ C$ obţinem $rang\ C = rang\ A$.

Observaţia 4.1.4 *Pentru simplificarea calculelor cu matrice se lucrează, deseori, cu matrice împărţită (partiţionată) în* **submatrice** *sau* **blocuri**, *obţinute ducând paralele la liniile şi coloanele ei. De exemplu, matricea $A \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ se poate scrie*

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array}\right)$$

unde $B \in \mathcal{M}_{p^2}(K)$, $E \in \mathcal{M}_{(n-p)^2}(K)$, $C \in \mathcal{M}_{p,(n-p)}$, iar $D \in \mathcal{M}_{n-p,p}$.

Cu matricele formate din blocuri se pot face operaţii ca şi cu matrice obişnuite, reducând calculele la matrice de ordine mai mici.

O importantă aplicaţie a partiţionării în blocuri o constituie inversarea unei matrice. Să presupunem că B este inversa matricei A. Atunci

$$AB = I$$

sau prin partiţionare

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & I \end{array}\right)$$

Efectuând înmulţirile şi identificând matricele din cei doi membrii, vom obţine

(1) $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I$,

(2) $A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0$,

(3) $A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0$,

(4) $A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I$.

Din (2) avem
$$B_{12} = -A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \cdot B_{22},$$
care înlocuită în (4) ne conduce la
$$B_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$

Deoarece $BA = I$, vom avea
$$B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0,$$
de unde
$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$$
iar din (2)
$$B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}.$$

Ordinea de calculare a blocurilor matricei B este: B_{22}, B_{12}, B_{21} şi B_{11}.

Exemplul 4.1.4. Să se afle inversa matricei
$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Partiţionăm luând
$$A_{11} = 2,\ A_{12} = (3\ 4),\ A_{21} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ şi } A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculăm $B_{22} = P^{-1}$, unde
$$P = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = \left(\begin{array}{c|c} -4 & -7 \\ \hline -\frac{5}{2} & -7 \end{array}\right)$$

Pentru a afla P^{-1} procedăm prin acelaşi algoritm, considerând $A = P$ şi făcând partiţionarea
$$A_{11} = -4,\ A_{12} = -7,\ A_{21} = -\frac{5}{2},\ A_{22} = -7.$$

Avem calculele
$$B_{22} = \left(-7 + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)(-7)\right)^{-1} = -\frac{8}{21}$$
$$B_{12} = \frac{1}{4}(-7)\left(-\frac{8}{21}\right) = \frac{2}{3}$$

$$B_{21} = \frac{8}{21}\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{21}$$

$$B_{11} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-7)\left(\frac{5}{21}\right) = -\frac{2}{3}$$

şi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{21} & -\frac{8}{21} \end{pmatrix}.$$

Acum revenim la calculul inversei matricei A iniţială. Avem

$$B_{22} = P^{-1},$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22} = -\frac{1}{2}(3\ 4)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{5}{21} & -\frac{8}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & -\frac{5}{21} \end{pmatrix},$$

$$B_{21} = -B_{22}A_{21}A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{21} \end{pmatrix},$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(3\ 4)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{21} \end{pmatrix} = \left(-\frac{4}{21}\right),$$

rezultând

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

În încheierea acestui paragraf să prezentăm o aplicaţie a matricelor la schimbarea bazei unui spaţiu vectorial.

Fie V un spaţiu vectorial peste câmpul K cu $dim\ V = n$ şi $B = \{e^{(1)}, e^{()2}, \ldots, e^{(n)}\}$ o bază a lui. Faţă de această bază un vector $x \in V$ se scrie în mod unic sub forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{(i)},$$

ceea ce înseamnă că vectorului x îi corespunde vectorul linie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ din K^n. De aici rezultă dacă avem în V sistemul de vectori

$$x^{(i)} = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots x_{in}), \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

atunci rangul sistemului de vectori $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}\}$ este egal cu rangul matricei coordonatelor

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{p1} & x_{p2} & \ldots & x_{pn} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că dacă considerăm în V sistemul de vectori $B_1 = \{f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}\}$, dat faţă de B prin formulele

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e^{(i)}, \quad j = \overline{1,n},$$

atunci B_1 formează o bază în V dacă şi numai dacă matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ este nesingulară.

În acest caz, A se numeşte **matricea schimbării de bază** sau **matricea de trecere de la baza B la baza B_1**.

Punând faţă de B_1

$$x = \sum_{j=1}^{n} y_j f^{(j)}$$

şi înlocuind pe f_j, avem

$$x = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \right) e^{(i)}$$

de unde, identificând cu $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{(i)}$, rezultă

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = \overline{1,n},$$

care constituie formulele de schimbare a sistemului de coordonate, corespunzătoare schimbării de bază B în B_1. Sub formă matricială formulele de schimbare se scriu astfel

$${}^t x = A\, {}^t y.$$

4.2 Determinanţi

Considerăm matricea pătratică $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ cu elemente din câmpul K. Formăm produse de forma $a_{1i_1}, a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$, obţinute luând câte un element şi numai unul din fiecare linie şi coloană a matricei A. Unui astfel de produs îi asociem permutarea (substituţia)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

numită **permutarea indicilor săi**. Notăm cu S_n mulţimea tuturor celor $n!$ permutări ale mulţimii $\{1, 2, \dots, n\}$.

În permutarea $\sigma \in S_n$ avem o **inversiune** dacă $i < j$ şi $\sigma(i) > \sigma(j)$.

De exemplu, în permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

elementele 4 şi 2 prezintă o inversiune.

Prin $Inv(G)$ notăm numărul inversiunilor permutării G, iar prin $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{Inv(\sigma)}$ **signatura** permutărilor σ. Dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$, avem o **permutare pară**, iar dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$ avem o **permutare impară**.

Definiţia 4.2.1 *Numim* **determinantul** *matricei pătratice* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$*, elementul* $det\ A \in K$ *dat de formula*

$$det\ A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

unde suma se extinde la toate cele $n!$ *permutări din* S_n*.*

Altfel spus, determinantul matricei A este elementul $det\ A$ din K egal cu suma a $n!$ produse, unde în fiecare produs intră ca factor câte un element de pe fiecare linie şi coloană a matricei A, produsul având semnul $+$ sau $-$ după cum permutarea indicilor săi este pară sau impară. Determinantul $det\ A$ se zice **de ordinul** n dacă matricea A are ordinul n. Pentru $det\ A$ folosim notaţia

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sau $det\ A = |A| = |a_{ij}|$.

Vom prezenta acum proprietăţile determinanţilor.

Propoziţia 4.2.1 *Determinantul unei matrice este egal cu determinantul transpusei sale.*

Demonstraţie. Valabilitatea Propoziţiei rezultă din faptul că o permutare σ şi inversa ei σ^{-1} au aceeaşi paritate.

Din această propoziţie rezultă că dacă pentru liniile unui determinant avem o propoziţie adevărată, atunci aceasta este adevărată şi pentru coloanele determinantului. De aceea, în continuare, vom formula şi justifica proprietăţile numai pentru liniile unui determinant.

Propoziţia 4.2.2 *Dacă linia* L_i *a matricei pătratice* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ *este suma a* p *vectori, atunci determinantul ei este egal cu suma a* p *determinanţi corespunzători matricelor care au aceleaşi linii cu* A*, cu excepţia liniei* L_i *unde are câte unul din cei* p *vectori.*

Demonstraţie. Dacă linia L_i este suma a p vectori atunci

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ij}^{(k)}, \quad i = \overline{1,n}$$

şi putem scrie

$$det\ A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1j_1} \dots a_{ij_i} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1j_1} \sum_{k=1}^{p} b_{ij_i}^{(k)} \dots a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1j_1} b_{ij_i}^{(k)} \dots a_{nj_n},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Propoziţia 4.2.3 *Dacă într-un determinant înmulţim o linie cu un factor $k \in K$, atunci valoarea determinantului se înmulţeşte cu k.*

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ şi B matricea obţinută din A, în care elementele liniei i sunt înmulţite cu k. Atunci

$$det\ (B) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1j_1} \dots (k a_{ij_i}) \dots a_{nj_n} =$$

$$= k \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1i_1} \dots a_{j_i} a_{nj_n} = k\ det\ A.$$

Propoziţia 4.2.4 *Dacă într-un determinant se schimbă două linii între ele, atunci valoarea lui îşi schimbă semnul.*

Demonstraţie. Se observă că prin schimbarea celor două linii permutarea indicilor îşi schimbă paritatea.

Propoziţia 4.2.5 *Dacă într-un determinant două linii sunt identice, atunci valoarea lui este zero.*

Demonstraţie. Dacă în $det\ A$ schimbăm între ele cele două linii identice, atunci, folosind propoziţia 4.2.4 putem scrie $det\ A = -det\ A$, de unde $det\ A = 0$.

Propoziţia 4.2.6 *Dacă într-un determinant avem două linii proporţionale, atunci valoarea lui este zero.*

Demonstraţie. Valabilitatea propoziţiei rezultă din Propoziţiile 4.2.3 şi 4.2.5.

Propoziţia 4.2.7 *Dacă într-un determinant la o linie adăugăm o combinaţie liniară de celelalte linii, atunci valoarea lui rămâne neschimbată.*

Demosntratîe. Se aplică Propoziţiile 4.2.2 şi 4.2.6.

Propoziţia 4.2.8 *Dacă liniile matricei care defineşte determinantul sunt liniar dependente (matricea este singulară), atunci valoarea determinantului este zero.*

Demonstraţie. Se aplică Propoziţiile 4.2.2 şi 4.2.6.

În particular, dacă pe o linie a unui determinant avem numai zero, atunci valoarea determinantului este zero.

Definiţia 4.2.2 *Numim* **minorul complementar** *al elementului a_{ij} din matricea pătratică $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$, determinantul asociat matricei extrase din A prin eliminarea liniei i şi coloanei j.*

Notăm M_{ij} minorul complementar al elementului a_{ij}.

Definiţia 4.2.3 *Numim* **complementul algebric** *al elementului a_{ij} din matricea pătratică $A = (a_j) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ elementul $A_{ij} \in K$ dat de relaţia*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Propoziţia 4.2.9 *Determinantul matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ este egal cu suma produselor elementelor liniei L_i ($i = \overline{1,n}$) prin complemenţii lor algebrici, adică*

$$det\ (A) = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Demosntraţie. Se arată că efectuând produsele $a_{ij}A_{ij}$, $j = \overline{1,n}$ obţinem toate produsele din definiţia lui $det\ A$ luate cu acelaşi semn.

Corolarul 4.2.1 *Dacă în dezvoltarea determinantului $det\ (A)$ după elementele liniei L_i înlocuim aceste elemente prin elementele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ din K, atunci suma obţinută reprezintă determinantul matricei obţinută din A prin înlocuirea liniei L_i cu vectorul $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.*

Corolarul 4.2.2 *Suma produselor elementelor unei linii L_i ai matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ prin complemenţii algebrici ai elementelor altei linii L_j este egală cu zero.*

De fapt, din Propoziţia 4.2.9 şi Corolarul 4.2.2 putem scrie

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \delta_{ik} det\ A, \quad i, k = \overline{1,n}.$$

Observaţia 4.2.1 *Propoziţia 4.2.9 se poate generaliza prin aşa numita regulă a lui Laplace. În acest scop se introduce noţiunea de minor de ordinul k al matricei* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$, *notat prin*

$$M^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$$

şi fiind determinatul asociat matricei de ordin k formată cu elementele ce se găsesc la intersecţia liniilor $i_1, \ldots, i_k$ *cu coloanele* $j_1, \ldots, j_k$ $(i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_k)$. *Minorul complementar al minorului* $M^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, *notat prin* $\overline{M}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ *este determinatul asociat matricei extrase din A prin înlăturarea liniilor* $i_1, \ldots, i_n$ *şi coloanelor* $j_1, \ldots, j_k$. *Se numeşte complementul algebric al minorului* $M^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ *elementul* $A^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \in K$ *dat de relaţia*

$$A^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}\overline{M}^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Regula lui Laplace ne spune că determinantul unei matrice pătratice este egal cu suma produselor minorilor de pe k linii fixate ale matricei prin complemenţii lor algebrici (v. [6]).

Observaţia 4.2.2 *Calculul unui determinant de ordin n se poate face calculând numai determinanţi de ordinul doi (de fapt, aplicând regula dreptunghiului fără împărţirea la elemntul pivot). Fie de calculat*

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Presupunem că $a_{11} \neq 0$. Împărţim linia întâi cu a_{11} (în faţa determinantului se va înmulţi cu a_{11}). Apoi facem 0 pe prima coloană, ceea ce va face ca elementul a_{ij} să fie înlocuit prin

$$a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}}a_{i1} = \frac{a_{ij}a_{11} - a_{1j}a_{i1}}{a_{11}} = \frac{b_{ij}}{a_{1j}}, \quad i, j = \overline{2, n}.$$

Dezvoltând acum determinantul după prima coloană şi scoţând în noul determinant factorul $1/a_{11}$ de pe fiecare linie, obţinem **formula lui Chio**:

$$det\ A = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Practic se aplică repetat această formulă, în care elementele b_{ij}, $i, j = \overline{2, n}$, se obţin prin "regula dreptunghiului" fără împărţirea la elementul pivot.
Exemplu. Avem

$$det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^2} \begin{vmatrix} 0 & -10 & -2 \\ 1 & -7 & 2 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2^2} \cdot 8 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \frac{1}{1} \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-13) = -52.$$

Utilizând regula lui Laplace se demonstrează:

Propoziţia 4.2.10 *Determinantul produsului a două matrice A şi B de ordin n este egal cu produsul determinanţilor acestor matrice.*

Propoziţia 4.2.11 *Condiţia necesară şi suficientă ca o matrice să fie nesingulară este ca determinantul ei să fie diferit de zero.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă A este o matrice pătratică nesingulară, atunci admite inversă şi din relaţia $A^{-1}A = I$ avem $det\ (A^{-1})\ det\ (A) = 1$ şi deci $det\ (A) \neq 0$.

Suficienţa. Dacă $det\ (A) \neq 0$, matricea A nu poate fi singulară deoarece după consecinţa 4.2.8 ar rezulta $det\ (A) = 0$.

Corolarul 4.2.3 *Rangul unei matrice este egal cu ordinul maxim al minorilor diferiţi de zero.*

Acest corolar ne dă un alt procedeu pentru aflarea rangului unei matrice.

Definiţia 4.2.4 *Se numeşte* **matrice adjunctă** *a matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ matricea notată prin A^* şi dată prin $A^* = (A_{ji})$, unde A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij} din A.*

Altfel spus, A^* este transpusa matricei formată cu complemenţii algebrici ai elementelor matricei A.

Propoziţia 4.2.12 *Inversa unei matrice nesingulare A de ordin n este dată de formula*

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ (A)} \cdot A^*.$$

Demonstraţie. Folosind corolarul 4.2.2, avem

$$A \cdot \frac{1}{det\ A} \cdot A^* = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{A_{kj}}{det\ (A)} \right) = \left(\delta_{ij} \frac{det\ (A)}{det\ (A)} \right) = (\delta_{ij}) = I_n,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Formula din Propoziţia 4.2.12 dă un alt procedeu pentru calcularea inversei unei matrice.

4.3 Sisteme de ecuaţii liniare

În acest paragraf vom aplica matricele şi determinanţii la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, întâlnite în mod curent în aplicaţiile economice.

Definiţia 4.3.1 *Se numeşte* **sistem de** m **ecuaţii liniare cu** n **necunoscute** *peste câmpul* K*, un ansamblu de relaţii de forma*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \tag{4.2}$$

unde $a_{ij} \in K$*,* $i = \overline{1,m}$*,* $j = \overline{1,n}$ *sunt* **coeficienţii sistemului***,* $b_1, \ldots, b_n \in K$ **termenii liberi** *ai sistemului, iar* $x_1, \ldots, x_n \in K$ *sunt* **necunoscutele sistemului***.*

Dacă cel puţin un termen liber este diferit de zero atunci vom spune că sistemul este **neomogen***, iar dacă toţi termenii liberi sunt nuli, atunci vom zice că sistemul este* **neomogen***.*

Definiţia 4.3.2 *Numim soluţie a sistemului (4.2) orice ansamblu format din* n *elemente* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *din* K *cu proprietatea că înlocuind în membrii stângi ai ecuaţiilor sistemului* $x_i = \alpha_i$*,* $i = \overline{1,n}$*, şi făcând calculele, se obţin elementele corespunzătoare din membrii drepţi.*

Definiţia 4.3.3 *Un sistem de ecuaţii liniare se zice că este* **compatibil** *dacă are cel puţin o soluţie şi* **incompatibil** *în caz contrar.*

Matricea

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right)$$

se numeşte **matricea sistemului**, *iar matricea*

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se numeşte **matricea extinsă (completă)** *a sistemului (4.2)*

Notând cu $X = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vectorul coloană al necunoscutelor şi cu $B = {}^t(b_1, b_2, \dots, b_m)$ vectorul termenilor liberi, sistemul (4.2) se poate scrie sub forma matriceală

$$AX = B.$$

Definiţia 4.3.4 *Numim* **sistem Cramer** *un sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute pentru care matricea A a sistemului este nesingulară, adică det $A \neq 0$.*

Pentru astfel de sisteme are loc:

Teorema 4.3.1 (Cramer). *Orice sistem Cramer este compatibil* **determinat** *(are soluţie unică) şi*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{det\ A}, \quad i = \overline{1, n},$$

unde Δ_i este determinantul matricei obţinută din matricea A a sistemului prin înlocuirea coloanei C_i cu coloana B a termenilor liberi.

Demonstraţie. Ţinând seama că A este nesingulară, din forma matriceală a sistemului obţinem $X = A^{-1}B$, care ne arată că sistemul este compatibil. Cum $A^{-1} = (det\ A)^{-1}A^*$, unde A^* este matricea adjunctă a matricei A (v. Propoziţia 4.2.12), înlocuind în $X = A^{-1}B$, obţinem

$$X = \frac{1}{det\ (A)} A^* B = \frac{1}{det\ (A)} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k1} b_k \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k2} b_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{ki} b_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{km} b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{det\ A} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_i \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix},$$

de unde

$$x_i = \frac{\Delta_i}{det\ (A)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Prezentăm acum **metoda eliminării totale** (Gauss–Jordan) pentru aflarea soluţiilor pentru sistemele Cramer.

În acest scop, scriem matricea extinsă a sistemului şi avem succesiv

$$(A|B) \Longrightarrow (A^{-1} \cdot A|A^{-1} \cdot B) \Longrightarrow (I_n|X). \tag{4.3}$$

unde I este matricea unitate de ordinul n.

Practic se lucrează cu **metoda dreptunghiului**, prin care pe poziţia lui A facem să apară I_n, iar pe poziţia lui B va apărea soluţia sistemului.

Exemplul 4.3.1. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -3. \end{aligned}$$

Avem succesiv

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{11} & \frac{27}{11} \\ 0 & 1 & \frac{7}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & \frac{52}{11} & -\frac{52}{11} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

de unde $x_i = 2, x_2 = 2, x_3 = -1$.

Observaţia 4.3.1 *Dacă în transformările (4.4) facem ca în locul lui I_n să apară o matrice triunghiulară superioară având elementele de pe diagonala principală egale cu* 1*, atunci se zice că se rezolvă sistemul prin* **metoda eliminării parţiale**.

De exemplu, pentru sistemul din exemplul 4.3.1, lucrând prin metoda eliminării parţiale, avem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & \frac{52}{1} & -\frac{52}{11} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

iar de aici

$$x_3 = -1 : x_2 + \frac{7}{1}x_3 = \frac{4}{11}, \text{ de unde } x_2 = \frac{4}{11} + \frac{7}{11} = 1 :$$

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 3, \text{ de unde } x_1 = 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Să revenim acum la cazul general al sistemelor de m ecuaţii liniare cu n necunoscute. Mai întâi să prezentăm două criterii de compatibilitate date de teorema lui Kronecker–Capelli şi Rouché–Frobenius.

Teorema 4.3.2 Kronecker–Capelli. *Condiţia necesară şi suficientă ca un sistem de ecuaţii liniare să fie compatibil este ca rangul matricei sistemului să fie egal cu rangul matricei extinse.*

Demonstraţie. Fie $A = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ sistemul de vectori coloane ai matricei A a sistemului (4.2); sistemul (4.2) poate fi scris sub forma

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_nC_n = B,$$

de unde rezultă că el este compatibil dacă şi numai dacă rangul sistemului de vectori coloane $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ ai matricei A este egal cu rangul sistemului de vectori coloane $\{C_1, C_2, \ldots, C_n, B\}$ ai matricei extinse $\overline{A}$, ceea ce este echivalent cu faptul că matricele A şi $\overline{A}$ au acelaşi rang.

Definiţia 4.3.5 *Numim* **determinantul principal** *pentru sistemul de ecuaţii liniare (4.2) orice minor de ordin maxim diferit de zero al matricei sistemului.*

Este evident că ordinul unui determinant principal este egal cu rangul matricei sistemului.

Definiţia 4.3.6 *Numim* **determinant caracteristic** *asociat unui determinant principal fixat, orice minor principal al matricei extinse obţinut prin* **completarea (bordarea)** *determinantului principal cu o linie formată din elementele corespunzătoare de pe una din liniile rămase şi cu coloana termenilor liberi corespunzători.*

Dacă rangul matricei sistemului este egal cu numărul m al ecuaţiilor, atunci nu avem determinanţi caracteristici, sistemuul fiind totdeauna compatibil deoarece rangul matricei extinse este tot m.

Teorema 4.3.3 (Rouché–Frobenius). *Condiţia necesară si suficientă ca un sistem de ecuaţii liniare să fie compatibil este ca toţi determinanţii caracteristici asociaţi unui determinant principal al sistemului să fie nuli.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie r rangul matricei A a sistemului (4.2). Dacă sistemul este compatibil, atunci după teorema lui Kronecker–Capelli, rangul matricei extinse $\overline{A}$ este egal cu r şi deci toţi determinanţii caracteristici sunt nuli deoarece sunt minori de ordinul $r+1$ pentru $\overline{A}$.

Suficienţa. Fără a restrânge generalizarea să presupunem că

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

este un determinant principal pentru care toţi determinanţii caracteristici sunt nuli. Considerând matricele

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ a_{r+s,1} & \dots & a_{r+s,n} & b_{r+s} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \dots, m-r \tag{4.5}$$

extrase din matricea extinsă $\overline{A}$, constatăm că ele au toate rangul r. Într-adevăr, primele $C_1, C_2, \dots, C_r$ coloane sunt liniar independente deoarece $\Delta_p \neq 0$, coloanele $C_{r+1}, C_{r+2}, \dots, C_n$ sunt combinaţii liniare de $C_1, C_2, \dots, C_r$ pentru că matricea A are rangul r, iar coloana C_{n+1} este combinaţie liniară de $C_1, \dots, C_r$ deoarece determinanţii caracteristici sunt nuli. Atunci $rang\ A = rang\ \overline{A}$ şi, pe baza teoremei lui Kronecker–Capelli, rezultă că sistemul este compatibil.

Definiţia 4.3.7 *Subsistemul sitemului (4.2) de ecuaţii liniare format din ecuaţiile corespunzătoare liniilor unui determinant principal se numeşte* **subsistem principal**, *şi ecuaţiile lui se numesc* **ecuaţii principale**. *Celelalte ecuaţii ale sistemului (4.2) se numesc* **ecuaţii secundare**. *Necunoscutele corespunzătoare coloanelor unui determinant principal se numesc necunoscute principale, iar celelalte se numesc* **necunoscute secundare (libere)**.

Definiţia 4.3.8 *Două sisteme de ecuaţii liniare se numesc* **echivalente** *dacă orice soluţie a unuia este soluţie şi pentru celelalt.*

Uşor se verifică că această relaţie este într-adevăr o relaţie de echivalenţă.

Teorema 4.3.4 *Un sistem liniar compatibil este echivalent cu orice subsistem principal al său.*

Demonstraţie. Este evident că orice soluţie a sistemului (4.2) este soluţie pentru orice subsistem al său deoarece ea verifică fiecare ecuaţie a sistemului.

Reciproc, să considerăm subsistemul principal cu determinantul principal (4.4). Cum matricele (4.5) au toate rangul r, ultima linie este o combinaţie liniară de celelalte şi deci avem:

$$L_{r+s} = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \ldots + \lambda_r L_r, \quad s = 1, 2, \ldots, m - r,$$

de unde

(4.6) $$a_{r+s,j} = \lambda_1 a_{j1} + \lambda_2 a_{j2} + \ldots + \lambda_r a_{jr}, \quad j = \overline{1, n}$$

şi

(4.7) $$b_{r+s} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_r b_r.$$

Dacă punem

$$E_i = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - b_i, \quad i = \overline{1, n},$$

atunci înmulţind egalităţile (4.6) corespunzător cu x_j, $j = \overline{1, n}$, egalitatea (4.7) cu -1 şi adunându-le obţinem

(4.8) $$E_{r+s} = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_r E_r, \quad s = 1, 2, \ldots, m - r$$

Acum, dacă considerăm o soluţie a subsistemului principal atunci $E_1 = 0, \ldots, E_r = 0$, iar din (4.9) rezultă că şi $E_{r+s} = 0$, $s = 1, 2, \ldots, m - r$. Deci, sistemul (4.2) este echivalent cu subsistemul principal considerat.

Practic, rezolvarea unui sistem compatibil de ecuaţii liniare se reduce la rezolvarea unui subsistem principal al său, în care termenii cu necunoscutele secundare au fost trecute în membrul doi, acestea devenind parametrii.

Subsistemul principal este un sistem Cramer şi se poate rezolva cu oricare din metodele date mai sus.

Observaţia 4.3.2 *Metodele eliminării totale sau parţiale se pot aplica şi la studierea compatibilităţii unui sistem de ecuaţii liniare. Şi anume, dacă nu se mai pot face cifre de* 1 *pe diagonala ce pleacă din* a_{11} *şi pe liniile care nu avem cifre de* 1 *găsim numai zerouri, atât în matricea sistemului cât şi la termenii liberi, atunci sistemul este compatibil. În caz contrar, sistemul este incompatibil.*

Exemplul 4.3.2. Să considerăm sistemul

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 5$$

$$x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2.$$

Utilizând metoda eliminării totale, avem succesiv:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Rezultă că rangul matricei sistemului este 2 şi cum pe linia a treia avem numai zero, deducem că avem un sistem compatibil nedeterminat. Soluţiile sistemului sunt

$$x_1 = 2 - a - \frac{4}{3}c; \quad x_2 = 1 + a + b - \frac{c}{3}; \quad x_3 = a; \quad x_4 = b; \quad x_5 = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 4.3.3. Să se rezolve sistemul

$$\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \end{array}$$

Folosim metoda eliminării totale şi avem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \text{-3} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \text{-3} & 1 & \text{-2} & \text{-1} \\ 1 & \text{-3} & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \text{-3} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \text{-3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Cum pe linia a treia avem o situaţie imposibilă, rezultă că sistemul este incompatibil.

În încheierea acestui paragraf să facem câteva observaţii cu privire la sistemele omogene de ecuaţii liniare.

Cum la orice sistem omogen $rang\ A = rang\ \overline{A}$, rezultă că el este compatibil, având evident soluţia $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, numită soluţie **nulă** sau **banală**.

Un sistem omogen va avea soluţii diferite de soluţia banală numai dacă rangul său va fi mai mic decât numărul necunoscutelor.

Teorema 4.3.5 *Mulţimea soluţiilor unui sistem omogen de ecuaţii liniare peste câmpul K, cu n necunoscute şi rang r, $r < n$, formează un subspaţiu vectorial V, cu $\dim V = n - r$, al spaţiului K^n.*

Demonstraţie. Considerăm că subsistemul principal asociat are determinantul principal Δ_p dat de (4.4) şi notăm necunoscutele secundare $x_{r+1}, \ldots, x_{n-r}$ respectiv prin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$. Soluţia generală a sistemului omogen este:

$$\begin{array}{l} x_i = \alpha_{i1}\lambda_1 + \alpha_{i2}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{i,n-r}\lambda_r, \quad i = \overline{1,r} \\ x_{r+k} = \lambda_k, \quad k = \overline{1, n-r}, \end{array}$$

care sub formă vectorială (matriceală) se scrie

$$X = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_r Y_{n-r}, \tag{4.9}$$

unde

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, Y_{n-r} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,n-r} \\ \alpha_{2,n-r} \\ \vdots \\ \alpha_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

sunt soluţii particulare ale sistemului omogen.

Se observă că $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-r}$ sunt vectori liniari independenţi în K^n, deoarece considerând matricea formată cu componentele lor, submatricea ei compusă din ultimele $n - r$ linii este matricea unitate de ordinul $n - r$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Din teorema 4.3.5 şi (4.9) rezultă

Corolarul 4.3.1 *Suma a două soluţii a unui sistem omogen este, de asemenea, o soluţie a lui.*

Corolarul 4.3.2 *Produsul dintre o soluţie a unui sistem omogen peste un câmp K cu un element din K este tot o soluţie a sistemului.*

4.4 Probleme

1. Arătaţi că:

a) mulţimea matricelor pătratice simetrice de ordin n peste câmpul K formează un subspaţiu vectorial de dimensiune $n(n+1)/2$ al spaţiului vectorial $\mathcal{M}_{n^2}(K)$ al matricelor pătratice de ordin n;

b) mulţimea matricelor pătratice antisimetrice de ordin n peste câmpul K formează un subspaţiu vectorial de dimensiune $n(n-1)/2$ al spaţiului vectorial $\mathcal{M}_{n^2}(K)$ al matricelor pătratice de ordin n;

c) $\mathcal{M}_{n^2}(K)$ este suma directă a subspaţiilor vectorial de la a) şi b).

2. Arătaţi operaţia de înmulţire a matricelor determină pe mulţimea matricelor ortogonale de ordin n peste K o structură de grup.

3. Arătaţi că transpusa unei matrice ortogonale este tot o matrice ortogonală.

4. Utilizând transformările elementare, aflaţi rangul matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 4 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

5. Dacă $a \in \mathbb{R}$, aflaţi rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Determinaţi a şi b aşa încât $rang\ A = 2$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Fiind dată matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 - a + a^2 & 1 - a \\ a - a^2 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

calculaţi A^n, $n = 1, 2, \ldots$.

8. Calculaţi A^n, $n = 1, 2, \ldots$, dacă

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Utilizând "metoda dreptunghiului", aflaţi A^{-1} pentru matricele:

a) $A = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -5 & 19 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

10. Utilizând partiţionarea în blocuri calculaţi A^{-1} pentru matricele:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

11. Calculaţi rangul matricei coordonatelor, aflaţi rangul sistemelor de vectori:

a) $x^{(1)} = (1, 0, 0, -1)$, $x^{(2)} = (2, 1, 1, 0)$, $x^{(3)} = (1, 1, 1, 1)$, $x^{(4)} = (1, 2, 3, 4)$, $x^{(5)} = (0, 1, 2, 3)$;

b) $x^{(1)} = (1, 1, 1, 1, 0)$, $x^{(2)} = (1, 1, -1, -1, -1)$, $x^{(3)} = (2, 2, 0, 0, -1)$, $x^{(4)} = (1, 1, 5, 5, 2)$, $x^{(5)} = (1, -1, -1, 0, 0)$.

12. Utilizând formula lui Chio, calculaţi determinanţii:

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

13. Arătaţi că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & z \end{vmatrix} = z \; det \; (A) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j,$$

unde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$, iar A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij} în matricea A.

14. Dacă $f(x) = (r_1 - x) \dots (r_n - x)$, demonstraţi că

$$\begin{vmatrix} r_1 & a & a & \dots & a \\ b & r_2 & a & \dots & a \\ b & b & r_3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & r_n \end{vmatrix} = \begin{cases} \dfrac{af(b) - bf(a)}{a - b} & , \text{ dacă } b \neq a \\ \\ f(a) - af'(a) & , \text{ dacă } b = a. \end{cases}$$

15. Utilizând matricea adjunctă, calculaţi inversa matricelor:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

c) Utilizând regula lui Laplace, calculaţi determinanţii:

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$,

b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; $\Delta_3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

16. Utilizând metoda eliminării totale rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare:

a) $\begin{aligned} 2x_1 &+2x_2 &-x_3 &+x_4 &= 4 \\ 4x_1 &+3x_2 &-x_3 &+2x_4 &= 6 \\ 8x_1 &+5x_2 &-3x_3 &+4x_4 &= 12 \\ 3x_1 &+3x_2 &-2x_3 &+2x_4 &= 6 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x_1 &-x_2 &+3x_3 &= 9 \\ 3x_1 &-5x_2 &+x_3 &= -4 \\ 4x_1 &-7x_2 &+x_3 &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x_1 &-2x_2 &-5x_3 &+x_4 &= 3 \\ 2x_1 &-3x_2 &+x_3 &+5x_4 &= -3 \\ x_1 &+2x_2 & &-4x_4 &= -3 \\ x_1 &-x_2 &-4x_3 &+9x_4 &= 22 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 &+2x_2 &+3x_3 &+4x_4 &+5x_5 &= 2 \\ 2x_1 &+3x_2 &+7x_3 &+10x_4 &+13x_5 &= 12 \\ 3x_1 &+5x_2 &+11x_3 &+16x_4 &+21x_5 &= 17 \\ 2x_1 &-7x_2 &+7x_3 &+7x_4 &+2x_5 &= 57 \\ x_1 &+4x_2 &+5x_3 &+3x_4 &+10x_5 &= 7 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} ax_1 &+x_2 &+x_3 &= 1 \\ x_1 &+ax_2 &+x_3 &= 1 \\ x_1 &+x_2 &+x_3 &= 1, a \in \mathbb{R} \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 5x_1 &-3x_2 &+2x_3 &+4x_4 &= 3 \\ 4x_1 &-2x_2 &+3x_3 &+7x_4 &= 1 \\ 8x_1 &-6x_2 &-x_3 &-5x_4 &= 9 \\ 7x_1 &-3x_2 &+7x_3 &+17x_4 &= \lambda \end{aligned}$

g) $\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 3 \\ x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +2x_4 & = 2 \\ 2x_1 & +9x_2 & +8x_3 & +3x_4 & = 7 \\ 3x_1 & +7x_2 & +7x_3 & +2x_4 & = 12 \\ 5x_1 & +7x_2 & +9x_3 & +2x_4 & = 20 \end{array}$

h) $\begin{array}{lllll} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = 5 \\ 4x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +6x_4 & = 7 \\ 6x_1 & -3x_2 & +7x_3 & +8x_4 & = 9 \\ \lambda x_1 & -4x_2 & +9x_3 & +10x_4 & = 11 \end{array}$

17. Utilizând metoda eliminării parţiale, rezolvaţi sistemele:

a) $\begin{array}{llll} x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +5x_2 & +4x_3 & = 4 \\ x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = 5 \end{array}$

b) $\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & -7x_5 & = 0 \\ 2x_1 & & +x_3 & & -2x_5 & = 1 \\ 3x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 20 \\ & -2x_2 & -5x_3 & & +x_5 & = 23 \\ x_1 & -x_2 & & +3x_4 & & = -14 \end{array}$

18. Rezolvaţi sistemele omogene de ecuaţii liniare:

a) $\begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & = 0 \\ 3x_1 & +5x_2 & -7x_3 & = 0 \\ 4x_1 & -5x_2 & -6x_3 & = 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{lllll} 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & +7x_4 & = 0 \\ 4x_1 & -2x_2 & +7x_3 & +5x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -5x_4 & = 0 \end{array}$

c) $\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{lllll} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \end{array}$

4.5 Testul Nr. 3 de verificare a cunoştinţelor

1. Definiţi următoarele noţiuni:

   a) Matrice pătratică simetrică;
   b) Matrice pătratică singulară;
   c) Inversa unei matrice pătratice;
   d) Determinant al unei matrice pătratice;
   e) Sistem Cramer.

   Enunţaţi următoarele teoreme:

   a) Teorema rangului;
   b) Teorema lui Kronecker - Capelli;
   c) Teorema lui Rouché - Frobenius.

2. Aflaţi cu ajutorul transformărilor elementare rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Calculaţi determinantul de ordinul n, $n > 2$:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & \dots & x_1 - y_n \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 & \dots & x_2 - y_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ x_n - y_1 & x_n - y_2 & \dots & x_n - y_n \end{vmatrix}$$

4. Să se discute după parametrul real m sistemul:

$$\begin{cases} mx + 4y & = & 3m - 2 \\ x + my & = & m^2 - 2 \end{cases}$$

5. Folosind metoda eliminării parţiale să se rezolve sistemul:

$$Ax = B \ , \ \text{cu} \ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Folosind metoda eliminării totale să se rezolve sistemul

$$Ax = B \ , \ \text{cu} \ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. Folosind metoda eliminării totale să se rezolve sistemul:

$$Ax = B \ , \ \text{cu} \ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Folosind metoda lui Laplace să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ x & 0 & 1 & 0 & 4 \\ x & x & 0 & 1 & 5 \\ x & x & x & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

9. Folosind metoda lui Laplace să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

10. Folosind formula lui Chio să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Capitolul 5

Operatori liniari. Forme biliniare şi forme pătratice

"Ceea ce nu-mi explic, mă nelinişteţe".
(Anatol France)

În modelarea matematică a fenomenelor din realitatea înconjurătoare, în particular cea economică, unul dintre cele mai des folosite concepte este cel de liniaritate.

Acesta se datorează, atât simplităţii conceptului de liniaritate, cât şi faptului că aproximarea unor situaţii neliniare prin situaţii liniare, aşa numitul "**principiu al liniarităţii**", constituie una din metodele de bază în studiul realităţii.

5.1 Operatori liniari

Fie X şi Y două spaţii vectoriale peste acelaşi câmp K.

Definiţia 5.1.1 *Numim* **operator liniar** *sau* **transformare liniară** *sau* **omomorfism de spaţii vectoriale**, *o aplicaţie* $T : X \to Y$ *care satisface condiţiile:*

1^o. $T(x^{(1)}+x^{(2)}) = T(x^{(1)})+T(x^{(2)})$, $(\forall)x^{(1)} \in X$, $(\forall)x^{(2)} \in X$ *(aditivitate),*

2^o. $T(\lambda x^{(1)}) = \lambda T(x^{(1)})$, $(\forall)\lambda \in K$, $(\forall)x^{(1)} \in X$ *(omogenitate).*

Teorema 5.1.1 *Operatorul* $T : X \to Y$ *este liniar dacă şi numai dacă pentru orice* $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ *şi orice* $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, *avem*

$$T(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}) = \lambda_1 T(x^{(1)}) + \lambda_2 T(x^{(2)}). \tag{5.1}$$

Demonstraţie. Să admitem că T este operator liniar, atunci, folosind condiţiile 1^o şi 2^o din Definiţia 5.1.1, avem:

$$T(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}) = T(\lambda_1 x^{(1)}) + T(\lambda_2 x^{(2)}) = \lambda_1 T(x^{(1)}) + \lambda_2 T(x^{(2)}),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Reciproc, dacă în (5.1) punem $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, obţinem condiţia 1^o din Definiţia 5.1.1, iar dacă punem $\lambda_2 = 0$. obţinem condiţia 2^o din aceeaşi definiţie.

Dacă $X = Y$ un operator liniar se numeşte **endomorfism**. Dacă transformarea liniară T este bijectivă, atunci ea se numeşte **izomorfism** de spaţii vectoriale. Un endomorfism bijectiv se numeşte **automorfism** al lui X.

Cum orice câmp K este un spaţiu vectorial peste el însuşi, atunci putem considera un operator liniar $T : X \to K$, numit şi **formă liniară** sau **funcţională liniară**.

În continuare vom nota cu $L(X, Y)$ mulţimea operatorilor liniari definiţi pe X cu valori în Y.

Exemple. 5.1.1. Fie $\mathcal{P}_n$ spaţiu vectorial al polinoamelor de grad cel mult n peste câmpul K. Aplicaţia $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$, $T(f) = f'$, adică derivata lui f, oricare ar fi $f \in \mathcal{P}_n$, este un operator liniar.

Într-adevăr, oricare ar fi $f_1, f_2 \in \mathcal{P}_n$ şi oricare ar fi $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ avem

$$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' = \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2).$$

5.1.2. Fie X un spaţiu vectorial n–dimensional peste câmpul K şi $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$ o bază în el şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ scalari fixaţi. Aplicaţia $f : X \to K$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$, unde $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e^{(i)}$, este o funcţională liniară.

5.1.3. Fie X un spaţiu vectorial peste câmpul K şi a un element fixat din K. Aplicaţia $T_a : X \to X$ definită prin $T_a(x) = ax$, pentru orice $x \in X$, este un operator liniar. Aplicaţia T_a se numeşte **omotetia spaţiului X de raport** $a \in K$.

Propoziţia 5.1.1 *Dacă $T \in L(X, Y)$, atunci avem*

1^o. *$T(\theta x) = \theta y$, unde θx şi θy sunt vectorii nuli ai spaţiilor X şi Y;*

2^o. *$T(-x) = -T(x)$, oricare ar fi $x \in X$.*

Demonstraţia propoziţiei rezultă din faptul că T este un omomorfism între grupurile comutative $(X, +)$ şi $(Y, +)$.

Propoziţia 5.1.2 *Dacă $T \in L(X, Y)$ şi X_1 este un subspaţiu al lui X, atunci $T(X_1)$ este un subspaţiu în Y.*

Demonstraţie. Pentru orice vectori $y_1, y_2 \in T(x_1)$ există $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$, astfel ca $y_1 = T(x^{(1)})$, $y_2 = T(x^{(2)})$. Considerând $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ şi folosind Teorema 5.1.1, avem

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 T(x^{(1)}) + \lambda_2 T(x^{(2)}) = T(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}).$$

Cum $\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} \in X_1$, rezultă că $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in T(X_1)$, ceea ce ne arată că $T(x_1)$ este un subspaţiu vectorial al lui Y.

În particular, $T(X)$ este un subspaţiu al lui Y şi se notează cu ImT. Dimensiunea lui ImT se numeşte **rangul transformării** T.

Observaţia 5.1.1 *Orice transformare liniară păstrează liniar dependenţa unui sistem de vectori, iar dacă este injectivă, atunci păstrează şi liniar independenţa.*

În particular, dacă $B = \{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ *este o bază în* X *şi transformarea* $T \in L(X,Y)$ *este injectivă, atunci* $B_1 = \{T(e^{(1)}, \ldots, T(e^{(n)}))\}$ *este o bază în* Y.

Propoziţia 5.1.3 *Dacă* $T \in L(X,Y)$ *şi* Y_1 *este un subspaţiu al lui* Y, *atunci contraimaginea* $T^{-1}(Y_1)$ *este un subspaţiu al lui* X.

Demonstraţie. Fie $x^{(1)}, x^{(2)} \in T^{-1}(Y_1)$; atunci $T(x^{(1)}), T(x^{(2)}) \in Y_1$ şi deci pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ avem $\lambda_1 T(x^{(1)}) + \lambda_2 T(x^{(2)}) = T(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}) \in Y_1$. Prin urmare, $\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} \in T^{-1}(Y_1)$ şi deci$T^{-1}(Y_1)$ este subspaţiu al lui X.

În particular, $T^{-1}(\{\theta y\})$, unde θy este vectorul nul din Y, este un subspaţiu al lui X, care se numeşte **nucleul** operatorului liniar T şi se notează cu $\ker T$.

Se verifică imediat că operatorul $T \in L(X,Y)$ este injectiv dacă şi numai dacă $\ker T = \{\theta x\}$, θx fiind vectorul nul din X.

Dimesiunea nucleului $\ker T$ se numeşte **defectul** transformării liniare T. Se demonstrează că

$$\dim(\ker T) + \dim(Im\ T) = \dim X \quad \text{(v. [6])}$$

Deoarece operatorii liniari sunt funcţii, operaţiile cu funcţii vor conduce la operaţii cu transformări liniare. Astfel, dacă $T_1, T_2 \in L(X,Y)$, atunci $T_1 + T_2 : X \to Y$, $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$, $(\forall)x \in K$, defineşte **adunarea** lor; $kT_1 : X \to Y$, $(kT_1)(x) = kT_1(x)$, $k \in K$, $(\forall)x \in X$ defineşte **mulţimea operatorului liniar** T_1 **cu un scalar** $k \in K$.

De asemenea, dacă $T_1 \in L(X,Y)$ şi $T_2 \in L(Y,Z)$, atunci $T_2 \circ T_1 : X \to Z$, $(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))$, $(\forall)x \in X$, defineşte **compunerea** a două transformări liniare. $T_2 \circ T_1$ se notează, uneori, şi cu $T_2 T_1$ şi se numeşte produsul transformărilor T_2 şi T_1.

Se verifică imediat că suma a două transformări liniare este tot o transformare liniară şi, de asemenea, produsul unei transformări liniare cu un scalar este tot o transformare liniară, adică $L(X, Y)$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $Hom(X, Y)$ peste K al tuturor funcţiilor definite pe X cu valori în Y.

În particular mulţimea $L(X, K)$ a funcţionalelor liniare definite pe spaţiul vectorial X cu valori în câmpul K este un spaţiu vectorial numit **dualul algebric** al spaţiului vectorial X şi este notat prin X^*.

Se arată că produsul a două transformări liniare este tot o transformare liniară, iar dacă $T \in L(X, Y)$ este bijectivă, atunci $T^{-1} \in L(Y, X)$, adică este tot o transformare liniară. Rezultă că $L(X, X)$ în raport cu operaţiile de adunare şi compunere este un inel cu element unitate.

În continuare vom arăta că un operator liniar între două spaţii vectorial finit dimensionale peste câmpul K este complet determinat de o matrice cu elemente din K.

Fie X şi Y două spaţii vectoriale peste acelaşi câmp K de dimensiuni finite, respectiv n şi m; $T \in L(X, Y)$ un operator liniar, $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}\}$ o bază în X şi $B_1 = \{f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(m)}\}$ o bază în Y. Deoarece oricare ar fi $x \in X$, $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e^{(j)}$, avem $T(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j T(e^{(j)})$, iar vectorii $T(e^{(j)}) \in Y$, $j = \overline{1, n}$, se exprimă, unic în funcţie de coordonatele lor în baza B_1:

$$T(e^{(j)}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f^{(i)}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.2}$$

avem

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) f^{(i)}. \tag{5.3}$$

Dacă $y = T(x) = t(y_1, y_2, \dots, y_n)$ în baza B_1, atunci comparând cu (5.3) găsim

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, m}, \tag{5.4}$$

relaţii ce pot fi scrise matriceal sub forma

$$y = Ax, \tag{5.5}$$

unde ${}^t x = (x_1, \dots, x_n)$ x_i, $i = \overline{1, n}$ fiind coordonatele lui x în baza B_1, iar matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ are pe coloane coordonatele imaginilor vectorilor din baza B în baza B_1. Matricea A se numeşte **matricea asociată (asociată)** transformării T faţă de cele două baze B şi B_1 alese în spaţiile X şi Y. Ea este unic determinată de relaţiile (5.2). Relaţiile (5.4) sau (5.5) se numesc **ecuaţiile operatorului liniar în bazele B şi B_1**.

Se arată că rangul transformării liniare este egal cu rangul matricei asociate ei faţă de două baze.

În adevăr, rangul transformării T fiind, conform definiţiei, dimensiunea spaţiului imagine, este egal cu rangul sistemului de vectori $\{T(e^{(j)})\}_{j=\overline{1,n}}$, care îl generează pe aceasta. Cum vectorii $T(e^{j})_{j=\overline{1,n}}$, sunt vectori coloană ai matricei A, rezultă că $rang\ A = rang\ T$.

Exemplul 5.1.4. Dacă $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $(x) = (x_1 - 3x_2, -4x_1 + 2x_2 + x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$, $e^{(1)} = (1, 0, 0)$, $e^{(2)} = (0, 1, 0)$, $e^{(3)} = (0, 0, 1)$, respectiv $B_1 = \{f^{(1)}, f^{(2)}\}$, $f^{(1)} = (1, 0)$, $f^{(2)} = (0, 1)$ sunt bazele canonice, atunci matricea ataşată lui T este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

deoarece $T(e^{(1)}) = (1, -4)$, $T(e^{(2)}) = (-3, 2)$, $T(e^{(3)}) = (0, 1)$.

Fie acum $T_1, T_2 \in L(X, Y)$ şi $T = T_1 + T_2$ suma lor. Avem

$$T(e^{(j)}) = T_1(e^{(j)}) + T_2(e^{(j)}), \quad j = \overline{1, n}$$

de unde notând cu A_1 matricea ataşată lui T_1, A_2 matricea ataşată lui T_2 şi cu C matricea ataşată lui T, deducem că $C = A_1 + A_2$, adică matricea transformării sumei este suma matricelor transformărilor termeni.

Analog, se arată că matricea produs dintre un scalar şi o transformare liniară este produsul scalarului cu matricea acelei transformări, iar matricea transformării liniare produs este egală cu produsul matricelor transformărilor liniare factori.

De aici, rezultă

Propoziţia 5.1.4 *i) Funcţia care asociază fiecărui operator liniar $T \in L(X, Y)$, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, matricea corespunzătoare ei faţă de două baze fixate, este un izomorfism între spaţiul vectorial $L(X, Y)$ şi spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$ al matricelor de tipul $m \times n$ peste K.*

ii) Funcţia care asociază fiecărui operator $T \in L(X, X)$, $\dim X = n$, matricea corespunzătoare ei într-o bază fixată în X, este un izomorfism între inelul $L(X, X)$ şi inelul matricelor pătratice de ordin n peste K.

Acum să cercetăm cum se schimbă matricea ataşată unei transformări liniare la schimbarea bazelor.

Teorema 5.1.2 *Fie B şi B' baze în spaţiul vectorial n–dimensional X peste K, iar B_1 şi B_1' baze în spaţiul vectorial m–dimensional Y peste acelaşi câmp K. Dacă $T \in L(X, Y)$, A este matricea transformării T faţă de bazele B şi B_1, iar A_1 este matricea transformării T faţă de bazele B' şi B_1', atunci $A_1 = D^{-1}AC$, unde C şi D sunt matricele de trecere de la baza B la B' respectiv de la B_1 la B_1'.*

Demonstraţie. Conform celor demnstrate în Capitolul IV, dacă $(x_1, \ldots, x_n) = {}^t x$ sunt coordonatele unui vector $x \in X$ în baza B şi $(x'_1, \ldots, x'_n) = {}^t x'$ sunt coordonatele aceluiaşi vector x în baza B', atunci $x = Cx'$, unde C este matricea trecerii de la baza B la baza B', având pe coloane coordonatele vectorilor bazei B' în raport cu B. Analog, dacă avem $(y_1, \ldots, y_m) = {}^t y$ coordonatele imaginii $y = T(x)$ în B_1 şi $(y'_1, \ldots, y'_m) = {}^t y'$ coordonatele lui y în baza B'_1, atunci $y = Dy'$.

Ţinând seama că T este un operator liniar, cu notaţiile din enunţ, avem $y = Ax$ respectiv $y' = A_1 x'$, de unde înlocuind $x' = C^{-1}x$, $y' = D^{-1}y$ şi $y = Ax$ în $y' = A_1 x'$, găsim $D^{-1}Ax = A_1 C^{-1} x$, de unde $D^{-1}A = A_1 C^{-1}$, care este echivalentă cu $D^{-1}AC = A_1$.

Observaţia 5.1.2 *Dacă $T \in L(X, X)$, $\dim X = n$, A matricea ataşată lui T în raport cu baza B, iar A_1 este matricea ataşată lui T în raport cu baza B_1, atunci $A_1 = C^{-1}AC$, unde C este matricea de trecere de la B la B'.*

Definiţia 5.1.2 *Matricele $A, B \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ se numesc* **asemenea**, *notăm aceasta prin $A \sim B$, dacă există matricea nesingulară $C \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ aşa încât $B = C^{-1}AC$.*

Se verifică imediat că asemănarea matricelor este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{M}_{n^2}(K)$.

Exemplul 5.1.5. Fie $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(x) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 2x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2).$$

Aflaţi matricea asociată lui T în raport cu perechea de baze $B' = \{e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, e_1^{(3)}\}$, $e_1^{(1)} = (0, 1, 1)$, $e_1^{(2)} = (1, 0, 1)$, $e_1^{(3)} = (1, 1, 0)$ în $\mathbb{R}^3$ şi $B'_1 = \{e_2^{(1)}, e_2^{(2)}, e_2^{(3)}, e_2^{(4)}\}$, $e_2^{(1)} = (1, 1, 1, 1)$, $e_2^{(2)} = (0, 1, 1, 1)$, $e_2^{(3)} = (0, 0, 1, 1)$, $e_2^{(4)} = (0, 0, 0, 1)$, în $\mathbb{R}^4$. Se cere matricea A_1 a transformării T faţă de bazele B' şi B'_1.

Deoarece

$$T(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

deducem că matricea transformării liniare T în raport cu bazele canonice B şi B_1 din $\mathbb{R}^3$ respectiv $\mathbb{R}^4$ este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matricea C de trecere de la baza B la B_1 este

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iar matricea D de trecere de la baza B' la baza B'_1 este

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se găseşte

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

şi deci avem

$$A_1 = D^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Am văzut în Observaţia 5.1.2 că matricea unei transformări liniare $T \in L(X, X)$, $\dim X = n$, depinde de alegerea bazei în X. În continuare ne punem problema de a găsi o bază faţă de care această matrice să aibă o formă diagonală

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Ţinând seama de expresiile (5.5) care definesc matricea A_1 a transformării liniare T în baza $B_1 = \{f^{(1)}, \dots, f^{(n)}\}$ obţinem:

Teorema 5.1.3 *Condiţia necesară şi suficientă ca matricea transformării liniare $T \in L(X, X)$, $\dim X = n$, să poată fi adusă la forma diagonală (5.6) este să existe o bază $B_1 = \{f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}\}$ în X şi n elemente $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ astfel încât să avem*

$$T(f^{(i)}) = \lambda_i f^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{5.7}$$

Definiţia 5.1.3 *Se spune că vectorul $x \neq \theta$, $x \in X$, este un* **vector caracteristic** *sau* **propriu** *pentru operatorul liniar $T \in L(X, X)$ dacă există un element $\lambda \in K$ astfel încât să avem*

$$T(x) = \lambda x. \tag{5.8}$$

Elementul λ corespunzător vectorului propriu x se numeşte atunci **valoare caracteristică** sau proprie pentru transformarea liniară T.

În conformitate cu această definiţie, matricea unei transformări liniare poate fi adusă la o formă diagonală dacă şi numai dacă transformarea are n vectori proprii liniar independenţi. În acest caz, elementele de pe diagonala principală din matricea diagonală sunt atunci valorile proprii corespunzătoare.

În cele ce urmează ne vom ocupa cu determinarea valorilor proprii şi vectorilor proprii pentru un operator liniar T din $L(X, X)$, cu $\dim X = n$.

Fie $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$ o bază în X, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ matricea asociată lui T, I matricea unitate de ordin n şi ${}^t x = (x_1, \ldots, x_n)$ coordonatele unui vector $x \in V$ în baza B; atunci ecuaţia (5.8) se poate scrie sub forma matriceală

$$(A - \lambda I)x = 0. \tag{5.9}$$

Această ecuaţie este echivalentă cu sistemul

$$\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array} \tag{5.10}$$

Sistemul (5.10) fiind liniar şi omogen, admite soluţii diferite de soluţia banală dacă şi numai dacă determinantul matricei sistemului este egal cu zero.

Acest determinant se notează cu $P_A(\lambda)$ şi are forma

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

numit **polinomul caracteristic** ataşat transformării liniare T sau matricei A.

Prin urmare valorile caracteristice ale matricei A sau transformări liniare T se găsesc printre rădăcinile ecuaţiei

$$P_A(\lambda) = 0, \tag{5.11}$$

numită **ecuaţia caracteristică** corespunzătoare matricei A sau transformării liniare T. Şirul $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ al tuturor rădăcinilor ecuaţiei caracteristice, unde fiecare este socotită de atâtea ori cât indică ordinul său de multiplicitate, constituie **spectrul** matricei A sau a operatorului liniar T.

Polinomul caracteristic are gradul n şi se poate scrie dezvoltat sub forma:

$$P_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\delta_1\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}\delta_2\lambda_{n-2} + \ldots + (-1)\delta_{n-1}\lambda + \delta_n,$$

unde δ_i, $i = \overline{1,n}$, este suma minorilor diagonali de ordin i ai matricei asociate operatorului liniar T într-o anumită bază, adică:

$$\delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2,i+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,i+1} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{n-i+1,n-i+1} & \dots & a_{n-i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,n-i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

suma având C_n^i termeni, $i = \overline{1,n}$. Prin minor diagonal al matricei A înţelegem un minor care are pe diagonala principală numai elemente de pe diagonala principală a matricei A. Se observă că $\delta_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = tr(A)$ este **urma** matricei A, iar $\delta_n = \det A$.

Propoziţia 5.1.5 *Două matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă matricea A este asemenea cu B, adică are loc Definiţia 5.1.2, atunci

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(C^{-1}AC - \lambda I) = \det(C^{-1}(A - \lambda I)C) =$$

$$= \det C^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \det C = \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda).$$

Corolarul 5.1.1 *Polinomul caracteristic al unui operator liniar $T \in L(X,X)$ este invariant la schimbarea bazei.*

Valabilitatea acestui corolar rezultă din Observaţia 5.1.2 şi Propoziţia 5.1.5.

Prin urmare, ca să găsim valorile caracteristice (spectrul) şi vectorii caracteristici pentru operatorul liniar $T \in L(X,X)$, $\dim X = n$, alegem o bază $B = \{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}$ în X, rezolvăm ecuaţia caracteristică $P_A(\lambda) = 0$ şi, introducând pe rând fiecare rădăcină λ_i, $i = \overline{1,n}$, a acesteia în sistemul (5.10), găsim vectori caracteristici corespunzători.

Propoziţia 5.1.6 *Vectorii caracteristici corespunzători unei valori caracteristice λ_i, $i = \overline{1,n}$ formează împreună cu vectorul nul al spaţiului vectorial X un subspaţiu V_i al lui X, numit* **subspaţiu caracteristic** *sau* **propriu***, de dimensiune cel mult egală cu ordinul de multiplicitate al lui λ_i, $i = \overline{1,n}$.*

Demonstraţie. Se observă că V_i este mulţimea soluţiilor ecuaţiei $(T - \lambda_i I)(x) = \theta$, adică nucleul transformării liniare $T - \lambda_i I \in L(X,X)$ şi după Propoziţia 5.1.3 acesta este un subspaţiu al lui X. Fie acum $k_i = \dim V_i$ şi m_i ordinul de multiplicitate pentru λ_i. Presupunem că am ales baza $B = \{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}$ în X aşa ca $e^{(1)}, \dots, e^{(k_i)}$ să se găsească în V_i. Atunci avem

$T(e^{(s)}) = \lambda_i e^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, k_i$ şi deci matricea A are, faţă de această bază, forma

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_i \; 0 \ldots 0 & a_{1,k_i+1} \ldots a_{1n} \\ 0 \; \lambda_i \ldots 0 & a_{2,k_i+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \; 0 \ldots \lambda_i & a_{k_i,k_i+1} \ldots a_{k_i,n} \\ 0 \; 0 \ldots 0 & a_{k_i+1,k_i+1} \ldots a_{k_i+1,n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \; 0 \ldots 0 & a_{n,k_i+1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

de unde rezultă

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{k_i} Q(\lambda)$$

şi cum ordinul de multiplicitate al lui λ_i este m_i, rezultă $k_i \leq m_i$.

Corolarul 5.1.2 *Unei valori caracteristice simple îi corespunde un subspaţiu propriu de dimensiune egală cu unu.*

Teorema 5.1.4 *Dacă vectorii caracteristici $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ corespund la valori caracteristice distincte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, atunci ei sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie matematică. Pentru $m = 1$, teorema este evident adevărată. Presupunem că este adevărată pentru k şi să o demonstrăm pentru $k+1$. Presupunem că $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k+1)}$ ar fi liniar dependenţi, adică ar există scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} \in K$, nu toţi nuli, aşa încât

$$\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \ldots + \alpha_{k+1} x^{(k+1)} = \theta. \tag{5.12}$$

Aplicând în (5.12) operatorul liniar T şi folosind ipoteza teoremei, obţinem

$$\alpha_1 \lambda_1 x^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 x^{(2)} + \dot{+} \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x^{(k+1)} = \theta. \tag{5.13}$$

Eliminând pe $x^{(k+1)}$ între relaţiile (5.12) şi (5.13) găsim

$$\begin{aligned} &\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) x^{(1)} + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) x^{(2)} + \ldots + \\ &\qquad + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) x^{(k)} = \theta \end{aligned} \tag{5.14}$$

Fără să restrângem generalitatea, să admitem cu $\alpha_1 \neq 0$, atunci, ţinând seama că $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ sunt liniar independenţi, deducem $\lambda_1 = \lambda_{k+1}$ ceea ce constituie o contradicţie. Rezultă că vectorii $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(m)}$ sunt liniar independenţi.

Corolarul 5.1.3 *Dacă operatorul liniar T are n valori caracteristice distincte atunci el poate fi adus la forma diagonală.*

Într-adevăm, în această situaţie alegând câte un vector propriu corespunzător fiecărei valori caracteristice obţinem n vectori caracteristici liniar independenţi şi deci o bază în X. Faţă de această bază, după Teorema 5.1.3, operatorul liniar T are forma diagonală.

Pentru cazul general se demonstrează (v. [6]):

Teorema 5.1.5 *Condiţia necesară şi suficientă ca matricea operatorului liniar $T \in L(X, X)$, $\dim X = n$, să aibă formă diagonală este ca toate valorile caracteristice să fie din câmpul K şi subspaţiile proprii corespunzătoare să aibă dimensiunile egale cu ordinele de multiplicitate corespunzătoare.*

Exemplul 5.1.6. Să considerăm transformarea liniară $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ definită prin

$$T(x) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2), x = (x_1, x_2, x_4) \in \mathbb{R}^3.$$

Să arătăm că T poate fi adusă la o formă diagonală şi să se precizeze o bază faţă de care matricea ei are forma diagonală.

Matricea transformării în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

iar ecuaţia caracteristică are forma

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de unde $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$. De aici găsim valorile caracteristice $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Vectorii caracteristici sunt soluţiile sistemului liniar omogen

$$\begin{aligned} &-\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ &x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ &x_1 + x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

unde λ se înlocuieşte pe rând cu una din valorile caracteristice,

Pentru $\lambda_1 = 2$ sistemul (5.15) are soluţia $x^{(1)} = (1, 1, 1)$, iar dimensiunea subspaţiului propriu V_1 este unu şi o bază în V_1 este dată de $x^{(1)}$.

Pentru $\lambda_1 = \lambda_3 = -1$, sistemul (5.15) se reduce la ecuaţia

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

şi subspaţiul propriu V_2 care este mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii, are dimensiunea 2, ca bază putând fi luaţi vectorii caracteristici $x^{(2)} = (-1, 1, 0), x^{(3)} =$

$(-1, 0, 1)$. Cum $\dim V_2 = 2$, adică egală cu ordinul de multiplicitate al valorii caracteristice $\lambda = -1$, deducem că matricea tranformării poate fi adusă la forma diagonală

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

iar $B_1 = \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$, unde $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ sunt vectorii caracteristici determinaţi, este o bază în $\mathbb{R}^3$ faţă de care matricea transformării are forma diagonală A_1.

În încheierea acestui paragraf, dă fără demonstraţie următorul rezultat (v. [6]):

Teorema 5.1.6 Cayley–Hamilton. *Pentru orice operator liniar* $T \in L(X, X)$*,* $\dim X = n$*, matricea transformării* A *verifică ecuaţia caracteristică* $P_A(\lambda) = 0$*.*

5.2 Forme biliniare

Definiţia 5.2.1 *Fie* X *un spaţiu vectorial peste câmpul* K*. Numim* **formă biliniară** *peste câmpul* K *o aplicaţie* $f : X \times X \to K$*, care este liniară în raport cu fiecare variabilă, adică satisface condiţiile:*

1^o. $f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f_(x, z) + \beta f(y, z)$.

2^o. $f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)$,

oricare ar fi $x, y, z \in X$ *şi* $\alpha, \beta \in K$*.*

Definiţia 5.2.2 *O formă biliniară* f *se numeşte* **simetrică** *dacă*

$$f(x, y) = f(y, x), \quad (\forall) x, y \in X$$

şi antisimetrică dacă

$$f(x, y) = -f(y, x), \quad (\forall) x, y \in X.$$

Exemple. 5.2.1. Produsul scalar definit într-un spaţiu vectorial real este o formă biliniară.

Să notă, cu $\mathcal{B}(X)$ mulţimea formelor biliniare definite pe X. Dacă $f, g \in \mathcal{B}(X)$ şi $k \in K$ atunci aplicaţiile $kf, f + g : X \times X \to K$ definite natural prin $(kf)(x, y) = kf(x, y)$ şi $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in X$, sunt forme biliniare, numite **înmulţirea cu un scalar** a unei forme biliniare şi respectiv **adunarea** a două forme biliniare.

Se constată imediat că operaţiile de adunare a două forme biliniare şi de înmulţire a unei forme biliniare cu un scalar din K definesc pe mulţimea $\mathcal{B}(X)$ o structură de spaţiu vectorial peste K.

Mulţimea formelor biliniare simetrice formează un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{B}(X)$.

Să considerăm acum spaţiul vectorial X de dimensiune finită n. Fie $B = \{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ o bază în X; punând $x, y \in X$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{(i)} \text{ şi } y = \sum_{j=1}^{n} y_j e^{(j)},$$

pentru forma biliniară f avem

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e^{(i)}, \sum_{j=1}^{n} y_j e^{(j)}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(e^{(i)}, e^{(j)}).$$

Rezultă că forma biliniară este determinată de valorile ei pe vectorii bazei. Elementele

$$a_{ij} = f(e^{(i)}, e^{(j)}), \quad i,j = \overline{1,n}$$

se numesc **coeficienţii formei biliniare**, iar expresia

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_i$$

se numeşte **expresia analitică** a formei biliniare.

Dacă punem

$$x = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n), y = {}^t(y_1, \ldots, y_n), A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{n^2}(K),$$

atunci putem scrie

$$f(x,y) = {}^t x A y,$$

care reprezintă **forma matriceală a formei biliniare**, iar A se numeşte **matricea ataşată formei biliniare în baza** B.

Rangul matricei ataşate într-o bază dată unei forme biliniare se numeşte **rangul formei biliniare**. Dacă rangul formei coincide cu dimensiunea spaţiului vectorial, atunci forma biliniară se numeşte **nedependentă**. Se numeşte **discriminantul** unei forme biliniare într-o bază dată, determinantul matricei asociate formei în baza dată.

5.3 Forme pătratice

În studiul unor probleme de analiză economică un rol deosebit îl au formele pătratice.

Definiţia 5.3.1 *Fie X un spaţiu vectorial peste câmpul K şi f o formă biliniară simetrică pe X. Numim* **formă pătratică** *asociată lui f aplicaţia $g : X \to K$, $g(x) = f(x, x)$, oricare ar fi x din X.*

Forma biliniară f care generează forma pătratică g se numeşte **forma polară** *a lui g.*

Dacă în câmpul K avem $a + a \neq 0$, pentru orice $a \in K$, $a \neq 0$, atunci avem

$$g(x + y) = f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) =$$

$$= g(x) + 2f(x, y) + g(y),$$

de unde

$$f(x, y) = \frac{1}{2}[g(x + y) - g(x) - g(y)].$$

Acest rezultat ne arată că forma polară este determinată în mod unic de forma sa pătratică. Altfel spus, între mulţimea formelor biliniare simetrice şi mulţimea celor pătratice definite pe X există un izomorfism. Dacă presupunem că $\dim X = n$ şi considerăm o bază $B = \{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ în el, atunci din expresia analitică a formei biliniare f (§5.2) găsim următoarea expresie analitică pentru forma pătratică g

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{5.16}$$

Dacă punem $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$, care pentru formele pătratice este o matrice simetrică, obţinem expresia matriceală pentru forma pătratică:

$$g(x) = {}^t x A x,$$

unde $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Definiţia 5.3.2 *Dacă în expresia analitică (5.16) a formei pătratice g, toţi coeficienţii a_{ij} cu $i \neq j$ sunt nuli, atunci se spune că reprezentarea formei pătratice este sub* **formă canonică** *.*

Teorema 5.3.1 (Gauss). *Expresia analitică a oricărei forme pătratice pe un spaţiu vectorial X peste K, $\dim X = n$, poate fi adusă printr-o schimbare de bază, la forma canonică.*

Demonstraţie. Vom demonstra această teoremă prin inducţie matematică după numărul k al variabilelor ce apar în expresia analitică a formei pătratice.

Evident că pentru $k = 1$ avem $g(x) = a_{11}x_1^2$, care este scrisă sub forma canonică. Presupunem teorema valabilă pentru $k-1$ variabile şi o demonstrăm pentru k. Fără a restrânge generalitatea presupunem că $a_{11} \neq 0$ (în caz contrar renumerotăm variabilele, iar dacă toţi $a_{11} = 0$, $i = \overline{1,n}$, atunci într-un produs $x_i x_j$ facem schimbarea de variabile $x_i = y_i - y_j$, $x_j = y_i + y_j$). Acum, scriem expresia analitică (5.16) a formei pătratice astfel

$$g(x) = \frac{1}{a_{11}}\left[a_{11}^2 x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{11}a_{1j}x_1x_j\right] + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j,$$

noii coeficienţi b_{ij} rezultă din reducerea termenilor asemenea după formarea pătratului perfect.

Făcând schimbarea de variabile

$$y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \quad y_k = x_k, \quad k = \overline{2,n}$$

obţinem

$$g(x) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 + h(y),$$

unde

$$h(y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}y_iy_j$$

nu depinde de x_1, deci în expresia ei analitică avem doar $k-1$ variabile. Folosind ipoteza inducţiei, există o bază (o schimbare de coordonate) a spaţiului X în care

$$h(y) = \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2.$$

Atunci

$$g(x) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_m y_m^2, \quad \lambda_1 = 1/a_{11}.$$

Teorema este demonstrată. Demonstraţia teoremei ne oferă şi un procedeu practic de a scrie o formă pătratică sub forma canonică numită **metoda lui Gauss**. Astfel, mai întâi se formează un pătrat perfect cu termeni care conţin pe x_1, apoi cu termenii ce conţin pe x_2 ş.a.m.d.

Exemplul 5.3.1. Să reducem la forma canonică forma pătratică $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$g(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_3^2$.

Utilizând metoda lui Gauss avem

$$g(x) = \frac{1}{2}(4x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3) + x_2^2 + 4x_3^2 = \frac{1}{2}\left(2x_1 + \frac{x_2}{2} + 2x_3\right)^2 +$$

$$+\frac{15}{16}x_2^2 + 3x_3^2 - \frac{1}{2}x_2x_3 = \frac{1}{2}\left(2x_1 + \frac{x_2}{2} + 2x_3\right)^2 +$$

$$+\frac{16}{15}\left[\left(\frac{15}{16}\right)^2 x_2^2 - \frac{8}{15}x_2x_3\right] + 3x^3 = \frac{1}{2}\left(2x_1 + \frac{x_2}{2} + 2x_3\right)^2 +$$

$$+\frac{16}{15}\left(\frac{16}{16}x_2 - \frac{1}{4}x_3\right)^2 + \frac{44}{15}x_3^2.$$

Punând

$$y_1 = 2x_1 + \frac{x_2}{2} + 2x_3, \quad y_2 = \frac{15}{16}x_2 - \frac{x_3}{4}, \quad y_3 = x_3 \tag{5.17}$$

obţinem forma canonică pentru g:

$$g(x) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{16}{15}y_2^2 + \frac{44}{15}y_3^2. \tag{5.18}$$

Din (5.17) avem:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}y_1 - \frac{4}{15}y_2 - \frac{16}{15}y_3 \\ x_2 &= \frac{16}{15}y_2 + \frac{4}{15}y_3 \\ x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

sau matriceal $x = Cy$, unde $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, $y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$, $x, y \in \mathbb{R}^3$ şi

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{4}{15} & -\frac{16}{15} \\ 0 & \frac{16}{15} & \frac{4}{15} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cum C este nesingulară şi are rangul 3 deducem că forma pătratică este nedegenerată, iar vectorii coloană din C, $f^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $f^{(2)} = \left(-\frac{4}{15}, \frac{10}{15}, 0\right)$, $f^{(3)} = \left(-\frac{16}{15}, \frac{4}{15}, 1\right)$ constituie noua bază faţă de care g are forma canonică (5.18).

Exemplul 5.3.2. Să aducem la forma canonică forma pătratică $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$g(x) = x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3x_4$.

Deoarece nu avem termeni în x_1^2, $i = 1, 2, 3, 4$, facem schimbare de variabile

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3, \quad x_4 = y_4 \tag{5.19}$$

şi obţinem

$$g(x) = y_1^2 - y_2^2 - y_1y_3 - 3y_2y_3 + y_3y_4. \tag{5.20}$$

Acum aplicând metoda lui Gauss avem succesiv,

$$g(x) = \left(y_1 - \frac{y_3}{2}\right)^2 - y_2^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - 3y_2y_3 + y_3y_4 =$$

$$= \left(y_1 - \frac{y_3}{2}\right)^2 - \left(y_2 + \frac{3}{2}y_3\right)^2 + 2y_3^2 + y_3y_4 =$$

$$= \left(y_1 - \frac{y_3}{2}\right)^2 - \left(y_2 + \frac{3}{2}y_3\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)^2 - \frac{1}{8}y_4^2.$$

Dacă punem

$$z_1 = y_1 - \frac{y_3}{2}, \quad z_2 = y_2 + \frac{3}{2}y_3, \quad z_3 = 2y_3 + \frac{1}{2}y_4, z_4 = y_4, \tag{5.21}$$

obţinem

$$g(x) = z_1^2 - z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 - \frac{1}{8}z_4^2. \tag{5.22}$$

Din (5.21) găsim

$$\begin{array}{lllll}
x_1 = & z_1 - & \frac{1}{2}z_2 + & \frac{3}{8}z_3 - & \frac{3}{32}z_4 \\
x_2 = & z_1 + & \frac{3}{2}z_2 - & \frac{9}{8}z_3 + & \frac{9}{32}z_4 \\
x_3 = & & & \frac{1}{2}z_3 - & \frac{1}{8}z_4 \\
x_4 & & & & z_4
\end{array}$$

care constituie schimbarea de variabile prin care $g(x)$ se scrie sub forma canonică (5.22).

O altă metodă de aducere la forma canonică a unei forme pătratice a fost dată de Jacobi.

Teorema 5.3.2 Jacobi. *Fie $g : X \to K$ o formă pătratică pe spaţiul vectorial n–dimensional X peste K şi $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ matricea formei în baza $B = \{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$ a spaţiului X. Dacă determinanţii*

$$\begin{aligned}&\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \\ &\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det A\end{aligned} \tag{5.23}$$

sunt toţi nenuli, atunci există o bază $B_1 = \{h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}\}$ a spaţiului X aşa încât g are forma canonică

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} y_i^2, \quad \Delta_0 = 1, \tag{5.24}$$

unde $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sunt coordonatele vectorului x în baza B_1.

Demonstraţie. Pentru găsirea bazei B, vom considera vectori $h^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$ de forma

$$\begin{aligned}&h^{(1)} = b_{11}e^{(1)} \\ &h^{(2)} = b_{21}e^{(1)} + b_{22}e^{(2)} \\ &\vdots \\ &h^{(n)} = b_{n1}e^{(1)} + b_{n2}e^{(2)} + \ldots + b_{nn}e^{(n)}\end{aligned} \tag{5.25}$$

şi vom impune condiţiile

$$\begin{aligned}&f(h^{(i)}, e^{(j)}) = 0, \quad \text{pentru } 1 \le j < i \le n, \\ &f(h^{(i)}, e^{(i)}) = 1, \quad \text{pentru } 1 \le i \le n,\end{aligned} \tag{5.26}$$

unde f este forma polară a formei pătratice g.

Condiţiile (5.26) determină în mod unic vectorii $h^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$. Astfel, ca să determinăm vectorul $h^{(i)} = h_{i1}e^{(1)} + h_{i2}e^{(2)} + \ldots + b_{ii}e^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, în condiţiile (5.26) obţinem sistemul liniar

$$\begin{aligned}&a_{11}\alpha_{i1} + a_{21}\alpha_{i2} + \ldots + a_{1i}\alpha_{ii} = 0 \\ &a_{21}\alpha_{i1} + a_{22}\alpha_{i2} + \ldots + a_{2i}\alpha_{ii} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{i-1,1}\alpha_{i1} + a_{i-1,2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{i-1,i}\alpha_{ii} = 0 \\ &a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{ii}\alpha_{ii} = 1\end{aligned}$$

care are o soluţie unică deoarece determinantul său este $\Delta_i \neq 0$.

Se arată uşor că vectorii $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$ astfel construiţi sunt liniar independenţi. Acum să arătăm că $B_1 = \{h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}\}$ esste baza în care matricea formei pătratice g este $C = (c_{ij}) = \mathcal{M}_{n^2}(K)$, cu $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ şi $c_{ij} = \Delta_{i-1}/\Delta_i$, $i = \overline{1,n}$.

Avem

$$c_{ij} = f(h^{(i)}, h^{(j)}) = f(h^{(i)}, b_{j1}e^{(1)} + b_{j2}e^{(2)} + \ldots + b_{jj}e^{(j)}) =$$

$$= b_{j1}f(h^{(i)}, e^{(1)}) + b_{j2}(h^{(i)}, e^{(2)}) + \ldots + b_{jj}f(h^{(i)}, e^{(j)}),$$

de unde folosind condiţiile (5.25), găsim

$$c_{ij} = 0, \text{ dacă } i \neq j \text{ şi } c_{ii} = b_{ii} = \Delta_{i-1}/\Delta_i, i = \overline{1,n}.$$

Teorema este astfel demonstrată.

Exemplul 5.3.3. Utilizând metoda lui Jacobi să aflăm formele canonice pentru formele pătratice din Exemplele 5.3.1 şi 5.3.2.

Matricea formei pătratice din Exemplul 5.3.1 este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

cu

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{4} \quad \text{şi} \quad \Delta_3 = \det A = 3,$$

iar din (5.23) obţinem

$$g(x) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{8}{7}y_2^2 + \frac{7}{12}y_3^2.$$

Pentru forma pătratică din exemplul 5.3.2 utilizăm forma (5.20) şi avem

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

cu

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = -1, \quad \Delta_3 = -\frac{1}{2} \text{ şi } \Delta_4 = \det A = \frac{1}{4}$$

de unde, folosind (5.23), găsim

$$g(x) = z_1^2 - z_2^2 + 2z_3^2 - 2z_4^2.$$

Observaţia 5.3.1 *Pentru determinarea formei canonice a unei forme pătratice g se pot utiliza şi valorile caracteristice (proprii) ale matricei A ataşatei ei într-o bază. Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile caracteristice corespunzătoare lui A, atunci forma canonică este*

$$g(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \quad (v.\ [6]).$$

În studiul punctelor de extrem avem nevoie de semnul unei forme pătratice.

Vom considera acum o formă pătratică peste un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

Definiţia 5.3.3 *Fie $g : X \to \mathbb{R}$ o formă pătratică reală adusă la o formă canonică într-o bază. Dacă în această formă canonică p coeficienţii sunt strict pozitivi, q sunt strict negativi iar $r = n - (p+q)$ sunt nuli, atunci tripletul (p, q, r) se numeşte* **signatura formei pătratice**.

Se demonstrează (v.[6]) următorul rezultat:

Teorema 5.3.3 (inerţiei). *Signatura unei forme pătratice este invariantă la schimbarea bazei.*

Definiţia 5.3.4 *O formă pătratică reală $g : X \to \mathbb{R}$ se numeşte* **pozitiv definită** *respectiv* **negativ definită** *dacă $g(x) > 0$ respectiv $g(x) < 0$, pentru orice $x \in X$, $x \neq \theta$.*

Forma g se numeşte **semidefinită pozitiv** *sau* **semidefinită negativ** *după cum $g(x) \geq 0$ sau $g(x) \leq 0$, pentru orice $x \in X$. Forma g se numeşte* **nedefinită** *dacă există vectorii $x^{(1)} \in X$ şi $x^{(2)} \in X$ astfel încât $g(x^{(1)}) > 0$ şi $g(x^{(2)}) < 0$.*

Teorema 5.3.4 (Sylvester). *În condiţiile Teoremei lui Jacobi, forma pătratică $g : X \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ şi negativ definită dacă şi numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.*

Demonstraţie. Să considerăm că g este pozitiv definită. Arătăm mai întâi că $\Delta_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$. Să presupunem prin obsurd că există $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru care $\Delta_k = 0$. Atunci în determinantul Δ_k una din linii este o combinaţie liniară a celorlalte, adică există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ astfel încât

$$(5.27) \qquad \alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \ldots + \alpha_k a_{kj} = 0, \quad j = \overline{1,k}.$$

Dacă f este polara formei pătratice g, ţinând seama că $a_{ij} = f(e^{(i)}, e^{(j)})$, $i, j = \overline{1,n}$, din (5.27) avem

$$0 = \alpha_1 f(e^{(1)}, e^{(j)}) + \alpha_2 f(e^{(2)}, e^{(j)}) + \ldots + \alpha_k f(e^{(k)}, e^{(j)}) =$$

$$= f(\alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \ldots + \alpha_k e^{(k)}, e^{(j)}), \quad j = \overline{1,k}$$

Înmulţind corespunzător cu α_j, $i = \overline{1,k}$, egalităţile precedente şi însumându-le, obţinem

$$f(\alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \ldots + \alpha_k e^{(k)}, \alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \ldots + \alpha_k e^{(k)}) = 0,$$

adică

$$(5.28) \qquad g(\alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \ldots \alpha_k e^{(k)}) = 0.$$

Cum g este pozitiv definită deducem că (5.28) este posibilă numai dacă $\alpha_1 e^{(1)} + \alpha_2 e^{(2)} + \ldots + \alpha_k e^{(k)} = \theta$, ceea ce contrazice liniar independenţa vectorială a bazei $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}\}$. Prin urmare, presupunerea că ar exista un $\Delta_k = 0$ este falsă şi deci $\Delta_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$.

Acum, folosind Teorema lui Jacobi, există o bază $B_1 = \{h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(n)}\}$ faţă de care

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} y_i^2.$$

Cum $g(x) > 0$, pentru orice x nenul. în particular pentru $(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, obţinem $\Delta_{i-1}/\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Deoarece $\Delta_0 = 1$ şi $\Delta_0/\Delta_1 > 0$, avem $\Delta_1 > 0$ şi din aproape în aproape obţinem $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Reciproc, dacă $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, atunci $\Delta_{i-1}/\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, şi

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} y_1^2 \geq 0$$

cu egalitate numai dacă $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$, adică $x = \theta$, ceea ce ne arată că g este pozitiv definită.

Dacă g este negativ definită atunci forma pătratică $-g : X \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită, matricea ei fiind $-A = (-a_{ij})$ cu minorii diagonali $\Delta_i' = (-1)^i \Delta_i$. Deoarece $-g$ este pozitiv definită numai dacă $\Delta_i' > 0$ rezultă că g este negativ definită numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Corolarul 5.3.1 *O formă pătratică reală pe un spaţiu n–dimensional este pozitiv respectiv negativ definită dacă şi numai dacă una din condiţiile de mai jos este îndeplinită:*

1^o. *signatura ei este $(n, 0, 0)$ respectiv $(0, n, 0)$;*

2^o. *toate valorile caracteristice ale matricei A ataşate formei într-o bază sunt strict pozitive (strict negative).*

Forma pătratică din Exemplul 5.3.1 este pozitiv definită deoarece signatura ei este $(3, 0, 0)$.

5.4 Probleme

1. Cercetaţi care dintre operatorii liniari

$$\begin{aligned}
&T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3, \text{ unde}\\
&T_1(x) = (x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 - 2x_2)\\
&T_2(x) = (2x_1 - 3x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)\\
&T_3(x) = (x_1^2, x_2 \cdot x_3), (\forall)x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

2. Fie operatorul $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x_1 - 2x_2, -3x_1 + 6x_2 + x_3)$, $(\forall)x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Arătaţi că T este liniar şi găsiţi $Ker\ T$ şi $Im\ T$.

3. Arătaţi că există o unică transformare liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care duce baza $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$ în baza $B_1 = \{f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}\}$ şi precizaţi matricea transformării faţă de cele două baze B şi B_1, dacă

a) $e^{(1)} = (2, 3, 5,\ e^{(2)}) = (0, 1, 2)\ e^{(3)} = (1, 0, 0)$, iar $f^{(1)} = (1, 1, 1)$, $f^{(2)} = (1, 1, -1)$, $f^{(3)} = (2, 1, 2)$;

b) $e^{(1)} = (2, 0, 3)$, $e^{(2)} = (4, 1, 5)$, $e^{(3)} = (3, 1, 2)$, iar $f^{(1)} = (1, 2, -1)$, $f^{(2)} = (4, 5, -2)$, $f^{(3)} = (1, -1, 1)$.

4. Pentru operatorul de derivare pe spaţiul polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult n găsiţi matricea transformării în bazele:

a) $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

b) $1, x - a, (x - a)^2/2!, \ldots, (x - a)^n/n!$, unde a este un număr real.

5. Transformarea liniară T are relativ la baza canonică $B = \{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, e^{(4)}\}$ matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aflaţi matricea transformării T relativ la bazele:

a) $B_1 = \{e^{(1)}, e^{(2)}.e^{(3)}, e^{(4)}\}$;

b) $B_1 = \{e^{(1)}, e^{(1)} + e^{(2)}, e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)}, e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} + e^{(4)}\}$.

6. Fie transformarea liniară T_1 de matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ relativ la baza $B_1 = \{a^{(1)}, a^{(2)}\}$, unde $a^{(1)} = (1,2)$, $a^{(2)} = (2,3)$ şi transformarea liniară T_2 de matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ relativ la baza $B_2 = \{b^{(1)}, b^{(2)}\}$, unde $b^{(1)} = (3,1)$, $b_2 = (4,2)$. Aflaţi matricea transformării $T_1 + T_2$ relativ la

a) baza B_1;

b) baza B_2.

Aceeaşi cerinţă pentru transformările $2T_1 + 3T_2$ şi T_1T_2.

7. Găsiţi valorile caracteristice şi vectorii caracteristici pentru matricele:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Arătaţi că două matrice asemenea au acelaşi determinant.

9. Precizaţi care din matricele de mai jos pot fi aduse la o formă diagonală într-o nouă bază. În caz afirmativ aflaţi baza şi matricea corespunzătoare:

$a)$ $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $b)$ $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $c)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. Arătaţi că o formă biliniară pe spaţiu vectorial X este suma dintre o formă biliniară antisimetrică şi o formă biliniară simetrică.

11. Demonstraţi că expresia oricărei forme pătratice de rang k pe un spaţiu vectorial real n–dimensional poate fi adusă printr-o schimbare de bază a următoarea formă normală

$$g(x) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \ldots - z_k^2$$

12. Demonstraţi că expresia oricărei forme biliniare simetrice pe un spaţiu vectorial real n–dimensional poate fi redusă printr-o schimbare de bază la următoarea formă normală

$$f(x,y) = u_1v_1 + \ldots + u_tv_t - u_{t+1}v_{t+1} - \ldots - u_kv_k.$$

13. Aduceţi la forma canonică următoarele forme pătratice:

a) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $y(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3$;

b) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$;

c) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_2x_3 - 10x_2x_3$;

d) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3$;

e) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

14. Pentru forma pătratică $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + 5x_3^2$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, aflaţi forma polară.

15. Precizaţi signatura formelor pătratice

a) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$;

b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$;

c) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$;

d) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_1x_3 + 2x_2x_4 + 52x_4^2$;

e) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4$.

Care din aceste forme pătratice sunt pozitiv definite?

16. Determinaţi parametrul real λ pentru care formele pătratice de mai jos sunt pozitiv definite:

a) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 - \lambda x_2^2 - 4x_1x_2$;

c) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

5.5 Testul Nr. 4 de verificare a cunoştinţelor

1. Definiţi următoarele noţiuni:

   a) Transformare liniară;

   b) Formă liniară;

   c) Nucleul unui operator liniar;

   d) Vector caracteristic;

   e) Formă biliniară;

   f) Formă pătratică;

   g) Forma canonică a unei forme pătratice;

   h) Signatura formei pătratice.

2. Arătaţi că următoarea aplicaţie este o transformare liniară: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, 4x_3)$.

3. Fie aplicaţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$ şi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = (x_2 - x_1, 4x_1)$. Arătaţi că f şi g sunt operatori liniari, apoi determinaţi $f \circ g$ şi $g \circ f$ şi verificaţi că sunt operatori liniari.

4. Fie transformarea liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$care în baza canonică este dată de matricea
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$
Găsiţi valorile şi vectorii caracteristici ataşaţi transformării.

5. Fie transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$cu exprimarea în baza B dată de matricea
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$
Arătaţi că există o bază B' în $\mathbb{R}^3$ faţă de care matricea transformării T are forma diagonală.

6. Diagonalizaţi matricea
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

7. Să se aducă la forma canonică, cu ajutorul metodei lui Gauss, forma pătratică:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4.$$

8. Să se aducă la forma canonică, cu ajutorul metodei lui Gauss, forma pătratică:

$$f(x) = x_1x_2 + 3x_1x_3 + 5x_2x_3.$$

9. Să se aducă la forma canonică, cu ajutorul metodei lui Jacobi, forma pătratică:

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 6x_2x_4.$$

10. Să se aducă la forma canonică, cu ajutorul metodei lui Jacobi, forma pătratică:

$$f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3^2 - 4x_3x_4 - x_4^2.$$

Capitolul 6

Elemente de programare liniară

"...matematica e o ştiinţă morală. Te învaţă că nu poţi spune orice. Totdeauna, lucrul următor trebuie să fie legat coerent de primul"
(acad.Sabba Ştefănescu)

6.1 Obiectul programării matematice

Am văzut în Capitolul I că aplicarea conceptelor matematice în studiul proceselor economice a căpătat o dezvoltare deosebită, prin rezolvarea unui număr tot mai mare de probleme. Astăzi, problemele de producţie, de planificare sau de proiectare se cer rezolvate nu la întâmplare, ci aşa fel încât soluţiile obţinute să fie corespunzătoare unui anumit scop. De exemplu, realizarea unui proces de producţie să se facă cu cheltuieli cât mai mici şi cu venit cât mai mare.

Organizarea ştiinţifică a proceselor economice, în scopul luării unei decizii conştiente, în raport cu ţelurile urmărite şi în urma unei analize a corelaţiilor dintre diferiţii factori ce intervin, constituie obiectul a ceea ce se numeşte **programare matematică**.

În general, problema programării desfăşurării unor fenomene economice este o problemă complexă şi vastă, pentru rezolvarea cărora matematica oferă diverse metode din multitudinea de ramuri, ca: aritmetica, algebra, geometria, analiza matematică, calculul probabilităţilor, analiza funcţională, ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale, etc.

Forma generală a unei probleme de programare matematică (v. cap.I, §1.2 şi §1.3) cere să se determine valorile variabilelor x_j, $j = \overline{1, n}$, astfel încât ele să satisfacă **restricţiile**

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) \geq 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{6.1}$$

iar funcţia $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, numită **funcţia obiectiv (scop, eficienţă)**, să ia valoarea optimă (maximă, respectiv minimă).

Deseori, pe lângă restricţiile (6.1), se mai adaugă şi condiţiile de nenegativitate $x_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$. Astfel că modelul matematic al unei probleme de programare arată astfel:

$$\begin{array}{l} (optim) z = f(x_1, \ldots, x_n) \\ g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \quad k = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{array} \tag{6.2}$$

Clasificarea problemelor de programare matematică se face după forma funcţiilor f şi g_k, natura necunoscutelor x_j, $j = \overline{1, n}$ şi respectiv, natura coeficienţilor necunoscutelor în f şi g_k, $k = \overline{1, m}$.

Dacă funcţiile f şi g_k, $k = \overline{1, m}$, sunt forme liniare, atunci problema de programare are denumirea consacrată de **problemă de programare liniară**, prescurtat (P.L).

Când funcţia z, sau unele restricţii, sunt funcţii neliniare, problema poartă denumirea de **problemă de programare neliniară**. De exemplu, dacă f este o formă pătratică, atunci spunem că avem o problemă de **programare pătratică**.

Dacă necunoscutele $x_1, \ldots, x_m$ se caută în numere întregi, spunem că avem **programare întreagă (în numere întregi)**.

Dacă toţi coeficienţii necunoscutelor x_j, $j = \overline{1, n}$, în f şi g_k, $k = \overline{1, m}$, sunt constanţi, atunci se zice că avem o problemă de **programare deterministă**. În caz că cel puţin unul din aceşti coeficienţi este variabil (depinzând de parametrii), avem **programare parametrică**. Dacă cel puţin unul din aceşti coeficienţi este o variabilă aleatoare, atunci spunem că avem **programare aleatoare** sau **stochastică**.

În acest capitol ne vom ocupa de problema programării liniare (P.L.). **Programarea liniară** este o ramură unitară a matematicilor aplicate în economie, având metode proprii şi generale de rezolvare a problemelor respective.

Constituirea obiectului de programare liniară s-a datorat faptului că în viaţa social–economică există multe aplicaţii care conduc la probleme liniare de programare (v. §1.3).

Rezolvarea problemelor de programare liniară poate fi făcută folosind diferite metode, unele particulare (metoda repartizării, metoda grafică), altele generale (metoda simplex).

Primele probleme de programare liniară au fost formulate de L.V.Kantorovici (1939) şi de F.L.Hitchcock (1941). Programarea liniară se naşte însă în anii de după cel de-al doilea război mondial, o dată cu formularea ei generală în 1947, de către G.B.Dantzig, care a propus, totodată şi un procedeu eficient de rezolvare **metoda simplex**.

Astăzi, se poate vorbi despre un mod unitar de abordare al tuturor problemelor de programare liniară. Diversele metode de rezolvare existente au ca ţel sporirea rapidităţii în calcule, având în vedere în special utilizarea calculatoarelor.

6.2 Noţiuni generale relative la o problemă de programare liniară

Problema de P.L., sub forma cea mai simplă pe care o vom numi **forma standard** sau **forma algebrică**, este dată prin modelul matematic

$$(optim) f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{6.3}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6.4}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{6.5}$$

unde (6.3) este **funcţia de scop**, (6.4) sunt **restricţiile**, iar (6.5) **condiţiile de nenegativitate**.

Sistemul de restricţii (6.4) reprezintă **concordanţa** internă a unui proces economic. Coeficienţii a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, sunt coeficienţi tehnici constanţi, planificaţi sau determinaţi în mod statistic. Necunoscutele x_j, $j = \overline{1,n}$, sunt mărimi care trebuie găsite, iar termenii liberi b_i, $i = \overline{1,m}$, sunt mărimi constante date, determinate de condiţiile locale ale procesului economic. numiţi **coeficienţi de restricţie** ai programului dat.

Dacă sistemul liniar (6.4) de ecuaţii de condiţii (restricţii) este **compatibil determinat**, atunci din punct de vedere economic avem un proces economic cu concordanţă internă rigidă. În acest caz nu mai are rost să se pună problema determinării valorii optime pentru funcţia scop deoarece ea are o valoare unică bine determinată, corespunzătoare soluţiei sistemului (6.4).

Când sistemul liniar (6.4) de ecuaţii de restricţii este **compatibil nedeterminat**, atunci concordanţa internă a procesului economic este elastică, deoarece oferă posibilitatea alegerii dintr-o infinitate de soluţii ale sitemului numai pe acelea care fac funcţia de scop optimă.

Utilizând puternicul aparat al matematicii, problema de programare liniară (6.3)–(6.5) poate fi prezentată şi în alte moduri.

Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$c = (c_1, \dots, c_n), \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cu aceste notaţii, problema de programare liniară (6.3)–(6.5) ia **forma matriceală**:

$$\begin{cases} (optim) f(x) = cx \\ Ax = b \\ x \geq \theta \end{cases}$$

Dacă notăm cu P_j, $j = \overline{1, n}$, vectorii ale căror componente sunt elemente corespunzătoare coloanelor matricei A, atunci problema de programare liniară (6.3)–(6.5) ia forma

$$\begin{cases} (optim) f(x) = cx \\ x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = b \\ x \geq \theta \end{cases}$$

numită **forma vectorială** a problemei de programare liniară.

Definiţia 6.2.1 *Se numeşte* **soluţie posibilă** *a problemei de programare liniară standard orice vector coloană $x^{(0)} \geq \theta$, care verifică sistemul de restricţii, adică $Ax^{(0)} = b$.*

Pe baza celor demonstrate în §3.5, rezultă că mulţimea tuturor soluţiilor posibile pentru o problemă de programare liniară este convexă.

Definiţia 6.2.2 *Se numeşte* **soluţie de bază** *pentru o problemă de programare liniară orice soluţie posibilă, care are cel mult m componente strict pozitive. Ea se obţine dintr-o soluţie posibilă, când necunoscutelor secundare se atribuie valoarea zero.*

Definiţia 6.2.3 *O soluţie de bază este numită* **nedegenerată**, *dacă are exact m componente strict pozitive. În caz contrar ea este numită soluţia de* **bază degenerată**.

Definiţia 6.2.4 *Soluţia posibilă $x^{(1)}$ este numită* **mai bună** *decât soluţia posibilă $x^{(2)}$, dacă $f(x^{(1)}) \leq f(x^{(2)})$ când pentru f se cere minimul, respectiv $f(x^{(1)}) \geq f(x^{(2)})$, când pentru f se cere maximul.*

Definiţia 6.2.5 *O soluţie de bază* $x^{(0)}$ *este soluţie optimă dacă* $f(x^{(0)})$ *este valoarea optimă pentru* f.

Definiţia 6.2.6 *Dacă avem* k *soluţii optime* $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$, *atunci* **soluţia generală** *este combinaţia liniară convexă a soluţiilor optime, adică*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{(i)},$$

cu $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \in [0, \infty)$, $i = \overline{1,k}$.

Observaţia 6.2.1 *Într-o problemă de programare liniară putem lucra considerând optimul drept minim deoarece dacă se cere maximul, atunci din relaţia* $\max f = -\min(-f)$ *se deduce că este suficient să se determine* $\min(-f)$, *iar apoi, cu semn schimbat, vom avea maximul lui* f.

Observaţia 6.2.2 *Într-o problemă economică concretă, de obicei, restricţiile problemei de programare liniară sunt inecuaţii, caz în care spunem că avem o* **problemă generală** *de programare liniară. Modelul matematic al acesteia, sub forma matricială, arată astfel:*

$$(optim) f(x) = cx$$

$$\begin{cases} A_1 x = b^{(1)} \\ A_2 x \geq b^{(2)} \\ A_3 x \leq b^{(3)} \\ \quad x \geq \theta. \end{cases}$$

6.3 Algoritmul simplex

Metoda generală de rezolvare a problemelor de programare liniară este cunoscută în literatura de specialitate sub numele de **metoda simplex** sau **algoritmul simplex**. Ea este datorată lui G.B.Dantzig, care a publicat primele lucrări în 1947. Ulterior s-au dat diverse variante îmbunătăţite ale metodei. Ea are la bază metoda eliminării complete de rezolvare a unui sistem de ecuaţii liniare, desigur adaptată scopului urmărit: aflarea soluţiilor cu componente nenegative, respectiv a soluţiei (sau soluţiilor) pentru care funcţia liniară de scop f are valoarea optimă.

Pe baza Observaţiei 6.2.1 este suficient să considerăm problema de P.L. standard.

$$\min f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Ideea metodei simplex constă în a găsirea mai întâi a unei soluţii de bază, apoi de un procedeu prin care din aceasta se obţin soluţii de bază mai bune, până la aflarea soluţiilor optime.

Pentru determinarea unei soluţii de bază vom utiliza metoda eliminării complete (Gauss–Jordan).

Utilizând metoda elementului pivot şi presupunând că am lucrat pe primele m coloane cu $m \leq n$, obţinem

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{i,m+1} & \ldots & \alpha_{in} & \beta_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{m,m+1} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right)$$

În ipoteza că $\beta_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$ (în caz contrar se aleg alte necunoscute principale), vom putea considera soluţia de bază

$$x_1 = \beta_1, \ldots, x_m = \beta_m, x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0$$

adică

$${}^t x^{(1)} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0).$$

Pentru această soluţie $x^{(1)}$ avem

$$f(x^{(1)}) = \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_j.$$

Acum vrem să trecem de la soluţia de bază $x^{(1)}$ la o nouă soluţie de bază $x^{(2)}$ care să fie mai bună. Să admitem că $\alpha_{i,m+1} \neq 0$, adică poate fi considerat ca element pivot. Atunci putem înlocui necunoscuta principală x_i prin x_{m+1}. Aplicând metoda elementului pivot, obţinem

$$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccccccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & -\frac{\alpha_{1,m+1}}{\alpha_{i,m+1}} & \ldots & 0 & 0 & \gamma_{1,m+2} & \ldots & \gamma_{1,n} & & \beta_1 - \frac{\beta_i \alpha_{1,m+1}}{\alpha_{i,m+1}} \\ 0 & 1 & \ldots & -\frac{\alpha_{2,m+1}}{\alpha_{i,m+1}} & \ldots & 0 & 0 & \gamma_{2,m+2} & \ldots & \gamma_{2,n} & & \beta_2 - \frac{\beta_i \alpha_{2,m+1}}{\alpha_{i,m+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{\alpha_{i,m+1}} & \ldots & 0 & 1 & \frac{\alpha_{i,m+2}}{\alpha_{i,m+1}} & \ldots & \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,m+1}} & & \frac{\beta_i}{\alpha_{i,m+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\frac{\alpha_{m,m+1}}{\alpha_{i,m+1}} & \ldots & 1 & 0 & \gamma_{m,m+2} & \ldots & \gamma_{m,n} & & \beta_m - \frac{\beta_i \alpha_{m,m+1}}{\alpha_{i,m+1}} \end{array}\right)$$

Noua soluţie $x^{(2)}$ are componentele

$$x_1^1 = \beta_1 - \frac{\beta_i \alpha_{1,m+1}}{\alpha_{i,m+1}}, \ldots, x_{i-1} = \beta_{i-1} - \frac{\beta_i \alpha_{i-1,m+1}}{\alpha_{i,m+1}}, x_i = 0,$$

$$x_{i+1} = \beta_{i+1} - \frac{\beta_i \alpha_{i+1,m+1}}{\alpha_{i,m+1}}, \ldots, x_m = \beta_m - \frac{\beta_i \alpha_{m,m+1}}{\alpha_{i,m+1}},$$

$$x_{m+1} = \frac{\beta_i}{\alpha_{i,m+1}}, x_{m+2} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Pentru ca $x^{(2)}$ să fie soluţie de bază trebuie ca

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{i,m+1}} \geq 0 \tag{6.6}$$

şi respectiv:

$$\beta_j - \frac{\beta_i \alpha_{j,m+1}}{\alpha_{i,m+1}} \geq 0, \quad j = \overline{1,m}, j \neq i, \tag{6.7}$$

Cum $\beta_i \geq 0$, din (6.6) găsim

$$\alpha_{i,m+1} > 0. \tag{6.8}$$

Inegalităţile (6.7) pentru care $\alpha_{j,m+1} \leq 0$ sunt evidente. Pentru $\alpha_{j,m+1} > 0$, din (6.7) găsim

$$\frac{\beta_j}{\alpha_{j,m+1}} \geq \frac{\beta_i}{\alpha_{i,m+1}},$$

care ne arată că

$$\lambda = \frac{\beta_i}{\alpha_{i,m+1}} \tag{6.9}$$

este minimul rapoartelor $\frac{\beta_j}{\alpha_{i,m+1}}$, cu $\alpha_{j,m+1} > 0$. Aşadar, vom obţine prin trecerea de la $x^{(1)}$ la $x^{(2)}$ o nouă soluţie de bază dacă elementul pivot este pozitiv, iar pivotul va fi acela care furnizează cel mai mic raport λ, când termenii liberi se împart la elementele pozitive corespunzătoare de pe coloana pe care lucrăm. În limbaj vectorial, se mai spune că am găsit condiţia prin care precizăm vectorul care iese din bază.

Acum să vedem în ce condiţii $x^{(2)}$ este o soluţie de bază mai bună ca $x^{(1)}$.

Avem

$$f(x^{(2)}) = c_1 \left(\beta_1 - \frac{\beta_i \alpha_{1,m+1}}{\alpha_{i,m+1}} \right) + \ldots + c_{i-1} \left(\beta_{i-1} - \frac{\beta_i \alpha_{i-1,m+1}}{\alpha_{i,m+1}} \right) +$$

$$+c_{i+1}\left(\beta_{i+1}-\frac{\beta_i\alpha_{i+1}}{\alpha_{i,m+1}}\right)+\ldots+c_m\left(\beta_m-\frac{\beta_i\alpha_{m,m+1}}{\alpha_{i,m+1}}\right)+c_{m+1}\frac{\beta_i}{\alpha_{i,m+1}}=$$

$$=f(x^{(1)})+\frac{\beta_i}{\alpha_{i,m+1}}\left[c_{m+2}-(c_1\alpha_{1,m+1}+c_2\alpha_{2,m+1}+\ldots+c_i\alpha_{i,m+1}+\ldots+\right.$$

$$\left.c_m\alpha_{m,m+1})\right].$$

Dacă notăm

$$z_{m+1}=c_1\alpha_{1,m+1}+c_2\alpha_{2,m+1}+\ldots+c_i\alpha_{i,m+1}+\ldots+c_m\alpha_{m,m+1}$$

atunci putem scrie

$$f(x^{(2)})-f(x^{(1)})=\lambda(c_{m+1}-z_{m+1})$$

Cum $\lambda>0$, rezultă că $f(x^{(2)})<f(x^{(1)})$ dacă $\Delta_{m+1}=c_{m+1}-z_{m+1}<0$.

Prin urmare, vom trece de la o soluţie de bază $x^{(1)}$ la una $x^{(2)}$ mai bună, dacă diferenţa $\Delta_{m+1}=c_{m+1}-z_{m+1}$, corespunzătoare vectorului P_{m+1}, corespunzător necunoscutei x_{m+1} care va deveni principală, este mai mică decât 0.

Practic, trebuie să calculăm mărimile

$$z_j=c_1\alpha_{1j}+c_2\alpha_{2j}+\ldots+c_m\alpha_{mj}=\langle C_B,P_j\rangle,\quad j=\overline{1,n},$$

adică produsul scalar dintre vectorii $C_B=(c_1,c_2,\ldots,c_m)$ al coeficienţilor necunoscutelor de bază şi ${}^tP_j=(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\ldots,\alpha_{mj})$ al componentelor coloanei j; apoi diferenţele $\Delta_j=c_j-z_j$, $j=\overline{1,n}$. Cum $f(x^{(2)})-f(x^{(1)})=\lambda\Delta_j$, rezultă că $x^{(2)}$ va fi o soluţie mai bună dacă $\Delta_j<0$. Aceasta înseamnă că dacă toate diferenţele $\Delta_j\geq 0$, $j=\overline{1,n}$, atunci nu se poate obţine o îmbunătăţire a soluţiei, şi în consecinţă, soluţia $x^{(1)}$ de bază este optimă. Din cele de mai sus, rezultă pentru algoritmul simplex următorii paşi:

Pasul 1. Se determină o soluţie de bază a problemei de P.L., prin aplicarea metodei elementului pivot care respectă condiţiile (6.8) şi (6.9);

Pasul 2. Se calculează toate valorile z_j, $j=\overline{1,n}$, obţinute prin produsul scalar al vectorilor C_B şi P_j;

Pasul 3. Dacă există diferenţe $\Delta_j=c_j-z_j<0$ se trece la găsirea unei alte soluţii de bază prin introducerea în bază a vectorului pentru care $\Delta_j<0$ este cea mai mare în valoare absolută. Dacă toate diferenţele $\Delta_j\geq 0$, atunci se trece la Pasul 5;

Pasul 4. Se repetă paşii 2 şi 3 până când nu mai există diferenţe $\Delta_j<0$. Acum s-a ajuns la soluţia optimă.

Pasul 5. Se scrie soluţia optimă: variabilele principale (ale căror vectori coloană conţin numai o cifră de 1 restul fiind zero) au valorile corespunzătoare din coloana termenilor liberi, variabilele secundare au toate valoarea zero, iar $\min f=\langle C_B,S_B\rangle$, unde S_B este soluţia de bază.

De obicei, pentru lucrul manual, paşii algoritmului simplex se efectuează într-un tabel. Acest tabel reprezintă, de fapt, transformările de la metoda eliminării complete aplicată la rezolvarea sistemului de restricţii, dar completate cu o primă linie formată din coeficienţii funcţiei scop f şi cu încă două coloane: C_B – a coeficienţilor bazei, respectiv cu baza B.

În momentul în care s-a ajuns la o soluţie de bază tabelul se completează cu două linii pentru calcularea valorilor lui z_j, respectiv Δ_j. Un astfel de tabel are forma

			c	c_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_n
	C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	$\ldots$	P_n
		e_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\ldots$	a_{1n}
		e_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\ldots$	a_{2n}
$\underset{e_i}{\overset{P_j}{\rightleftarrows}}$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	a_{ij}	$\vdots$
		e_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\ldots$	a_{mn}
		z_j	f					
		Δ_j	-					

$\underset{e_i}{\overset{P_j}{\rightleftarrows}}$ semnifică faptul că vectorul e_i pleacă din bază, în locul lui intrând vectorul P_j. Să ilustrăm acestea printr-un exemplu.

Exemplul 6.3.1. Să se rezolve problema de P.L.

$$(\min)f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4$$

cu restricţiile

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}.$$

Avem

			c	1	2	1	3	
	C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	
$\overset{P_1}{\underset{e_1}{\rightleftarrows}}$		e_1	6	2	1	-1	2	
		e_2	5	1	1	2	0	
		e_3	8	-1	2	1	1	
	1	P_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	
$\overset{P_2}{\underset{e_2}{\rightleftarrows}}$		e_2	2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	
		e_3	11	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	
	1	P_1	1	1	0	-3	2	
	2	P_2	4	0	1	5	-2	
$\overset{P_4}{\underset{e_3}{\rightleftarrows}}$		e_3	1	0	0	-12	7	
$\overset{P_3}{\underset{P_1}{\rightleftarrows}}$	1	P_1	$\frac{5}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	0	
	2	P_2	$\frac{30}{7}$	0	1	$\frac{11}{2}$	0	Prima soluţie de bază
	3	P_4	$\frac{1}{7}$	0	0	$-\frac{12}{7}$	1	
		z_j	$\frac{68}{7}$	1	2	$-\frac{11}{7}$	3	
		Δ_j	–	0	0	$\frac{13}{7}$	0	

Cum $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1,4}$, rezultă că soluţia de bază găsită este şi optimă: ${}^t x_{min} = \left(\frac{5}{7}, \frac{30}{7}, 0, \frac{1}{7}\right)$ şi $\min f = \frac{68}{7}$.

Observaţia 6.3.1 *Dacă printre vectorii P_j avem vectori unitari din baza canonică, atunci aceştia pot fi luaţi direct în baza B.*

Exemplul 6.3.2. Să se rezolve problema de P.L.

$$(\max) f(x) = -3x_1 + 7x_2 - \frac{1}{2}x_3 - 5x_4 - 3x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_6 & = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_7 & = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_5 & = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}$$

Cerinţa de maxim poate fi înlocuită prin cea de minim (vezi Observaţia 6.2.1), considerând

$$(\min)(-f(x)) = 3x_1 - 7x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 5x_4 + 3x_5$$

Se mai observă că vectorii P_5, P_6 şi P_7 sunt din baza canonică, deci, pot fi consideraţi direct în baza B.

Avem

	C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
			c	3	-7	$\frac{1}{2}$	5	3	0	0	
$\overset{P_1}{\underset{P_6}{\rightleftarrows}}$	0	P_6	2	2	1	1	-1	0	1	0	
	0	P_7	3	-1	2	-2	-2	0	0	1	Prima soluţie de bază
	3	P_5	9	3	-1	1	0	1	0	0	
		z_j	27	9	-3	3	0	3	0	0	
		Δ_j	–	-6	-4	$-\frac{5}{2}$	5	0	0	0	
	3	P_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
$\overset{P_2}{\underset{P_7}{\rightleftarrows}}$	0	P_7	4	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	A doua soluţie de bază
	3	P_5	6	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0	
		z_j	21	3	$-\frac{13}{2}$	0	3	3	-3	0	
		Δ_j	–	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	0	3	0	
$\overset{P_3}{\underset{P_1}{\rightleftarrows}}$	3	P_1	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	
	-7	P_2	$\frac{8}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	-1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	A treia soluţie de bază
	3	P_5	10	0	0	-2	-1	1	-1	1	
		z_j	$\frac{97}{5}$	3	-7	$\frac{3}{5}$	4	3	$-\frac{16}{5}$	$-\frac{2}{5}$	
		Δ_j	–	0	0	$-\frac{1}{10}$	1	0	$\frac{16}{5}$	$\frac{2}{5}$	
	$\frac{1}{2}$	P_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	
	-7	P_2	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
	3	P_5	$\frac{21}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	-1	1	0	$\frac{1}{2}$	
		z_j	$\frac{155}{8}$	$\frac{23}{8}$	-7	$\frac{1}{2}$	4	3	$-\frac{13}{4}$	$-\frac{3}{8}$	A patra soluţie de bază
		Δ_j	–	$\frac{1}{8}$	0	0	1	0	$\frac{13}{4}$	$\frac{3}{8}$	

Cum toţi $\Delta_j \geq 0$. $j = \overline{1,7}$, rezultă că am găsit soluţia optimă, dată de ${}^t x = \left(0, \frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{21}{2}, 0, 0\right)$, iat $\min(-f(x)) = 155/8$. Rezultă că problema de P.L. dată are aceeaşi soluţie de optim, iar $(\max) f(x) = -\min(-f(x)) = -155/8$.

Observaţia 6.3.2 *O problemă de P.L. de maxim se poate rezolva şi direct, fără a o mai reduce la una de minim, numai că atunci vom avea soluţia optimă când* $\Delta_j \leq 0$, $j = \overline{1,n}$. *Dacă avem şi* $\Delta_j > 0$, *atunci vom alege pe cea mai* *mare $\Delta_j > 0$, aceasta determinând vectorul care intră în bază. Vectorul care iese din bază se stabileşte ca şi la problema de P.L. de minim.*

Observaţia 6.3.3 *Dacă în unele ecuaţii de restricţii avem termeni liberi negativi, respectivele ecuaţii pot fi înmulţite cu -1.*

6.4 Cazuri speciale într-o problemă de P.L.

În acest paragraf vom analiza câteva situaţii speciale care pot apărea într-o problemă de P.L.

6.4.1 Soluţii multiple

În orice tabel simplex toate diferenţele Δ_j corespunzătoare vectorilor bazei (necunoscutelor principale) sunt nuli. Dacă în tabelul simplex, care conţine soluţia optimă, numărul zerourilor din linia diferenţelor Δ_j este mai mare ca m (numărul vectorilor unitari), atunci problema de P.L. poate avea mai multe soluţii optime. Pentru a găsi celelalte soluţii optime se introduc în bază, dacă este posibil, vectorii P_j pentru care $\Delta_j = 0$. Numărul maxim de soluţii optime este C_k^m, unde k este numărul de zerouri din linia diferenţelor Δ_j. După obţinerea tuturor soluţiilor optime se scrie soluţia optimă generală ca şi o combinaţie liniară convexă (vezi Definiţia 6.2.6).
Exemplul 6.4.1. Să se rezolve problema de P.L.

$$(\min) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 100 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ & x_2 & & +x_4 & = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Rezolvarea problemei de P.L. cu algoritmul simplex este dată în tabelul următor

			c	3	2	2	1	
	C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	
		e_1	100	1	1	1	1	
		e_2	0	-1	-1	1	1	
$\overset{P_2}{\underset{e_3}{\rightleftarrows}}$		e_3	10	0	1	0	1	
		e_1	90	1	0	1	0	
$\overset{P_3}{\underset{e_2}{\rightleftarrows}}$		e_2	10	-1	0	1	2	
	2	P_2	10	0	1	0	1	
$\overset{P_1}{\underset{e_1}{\rightleftarrows}}$		e_1	80	2	0	0	-2	
	2	P_3	10	-1	0	1	2	
	2	P_2	10	0	1	0	1	
	3	P_1	40	1	0	0	-1	
	2	P_3	50	0	0	1	1	Prima soluţie de bază
	2	P_2	10	0	1	0	1	
		z_j	240	3	2	2	1	
		Δ_j	–	0	0	0	0	

Cum toate diferenţele $\Delta_j \geq 0$ rezultă că avem soluţia optimă

$$x^{(1)} = (40, 10, 50, 0), \text{ cu } (\min) f(x) = 240.$$

Cum avem patru zerouri pe linia lui Δ_j este posibil să obţinem şi o altă soluţie optimă, introducând pe P_4 în bază. Cum λ_{minim} se obţine pentru P_2, vectorul P_4 va intra în locul lui P_2. Tabelul simplex pentru problema P.L. se continuă astfel:

		c	3	2	2	1
C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
3	P_1	50	1	1	0	0
2	P_3	40	0	-1	1	0
1	P_4	10	0	1	0	1
	z_j	240	3	2	2	1
	Δ_j	–	0	0	0	0

Se obţine a doua soluţie optimă

$$x^{(2)} = (50, 0, 40, 10), \text{ cu } (\min) f(x) = 240.$$

Se observă că alte soluţii optime nu mai există.

Soluţia generală a problemei va fi:

$$x = \alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}, \text{ unde } \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1,$$

adică

$$x = (40\alpha + 50\beta, 10\alpha, 50\alpha + 40\beta, 10\beta), (\min) f(x) = 240.$$

Observaţia 6.4.1 *În general, soluţia optimă generală nu este şi soluţie de bază, numărul componentelor sale nenule fiind mai mare decât* m.

6.4.2 Soluţie infinită

Fie o problemă de P.L. de minim. Există situaţii în care avem o diferenţă $\Delta_j < 0$, dar componentele vectorului P_j sunt toate negative sau 0, ceea ce face imposibilă alegerea elementului pivot. Vom arăta că în această situaţie funcţia de eficienţă are un minim infinit, adică valoarea ei poate fi făcută oricât de mică.

Considerăm tabelul simplex

		c	c_1	c_2	$\dots$	c_m	$\dots$	c_j	$\dots$	c_n
C_B	B	b	P_1	P_2	$\dots$	P_m	$\dots$	P_j	$\dots$	P_n
c_1	P_1	β_1	1	0	$\dots$	0	$\dots$	α_{1j}	$\dots$	α_{1n}
c_2	P_2	β_2	0	1	$\dots$	0	$\dots$	α_{2j}	$\dots$	α_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_m	P_m	β_m	0	0	$\dots$	1	$\dots$	α_{mj}	$\dots$	α_{mn}
	z_j	z_b	c_1	c_2	$\dots$	c_m	$\dots$	z_j	$\dots$	z_n
	Δ_j	–	0	0	$\dots$	0	$\dots$	Δ_j	$\dots$	Δ_n

cu soluţia de bază $x^{(1)} = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$, $\Delta_j < 0$ şi $\alpha_{ij} < 0$, $i = \overline{1, m}$.

Atribuim necunoscutei x_j valoare $M > 0$ (oricât de mare), adică $x_j = M$, iar celorlalte necunoscute secundare le atribuim valoare 0, adică $x_{m+1} = 0, \dots, x_{j-1} = 0$, $x_{j+1} = 0, \dots, x_n = 0$. Obţinem astfel soluţia posibilă

$$x^{(2)} = (\beta_1 - \alpha_{1j}M, \beta_x - \alpha_{2j}M, \dots, \beta_m - \alpha_{mj}M, 0, \dots, M, 0, \dots, 0)$$

Valoarea funcţiei de scop f pentru $x^{(2)}$ este:

$$f(x^{(2)}) = c_1(\beta_1 - \alpha_{1j}M) + c_2(\beta_2 - \alpha_{2j}M) + \dots + c_m(\beta_m - \alpha_{mj}M) + c_jM =$$

$$= f(x^{(1)}) + M[c_j - (c_1\alpha_{1j} + c_2\alpha_{2j} + \dots + c_m\alpha_{mj})] = f(x^{(1)}) + M\Delta_j.$$

Cum $\Delta_j < 0$ şi $M \to \infty$, rezultă că $f(x^{(2)}) \to -\infty$, ceea ce trebuia demonstrat.

Pentru o astfel de problemă de P.L. sse spune că ea are **soluţie (optimă) infinită**.

Exemplul 6.4.2. Să se rezolve problema de P.L.:

$$(\min) f(x) = -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 & +x_2 & & -3x_4 & = 10 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & & = 6 \\ 2x_1 & -x_2 & & +3x_4 & = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Utilizând algoritmul simplex obţinem tabelul:

			c	-2	1	-2	-3
	C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4
		e_1	10	4	1	0	-3
	-2	P_3	6	2	-1	1	0
$\overset{P_4}{\underset{e_3}{\rightleftarrows}}$		e_3	6	2	-1	0	3
$P_1 \longleftarrow$ $\longrightarrow e_1$		e_1	16	6	0	0	0
	-2	P_3	6	2	-1	1	0
	-3	P_4	4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
	-2	P_1	$\frac{8}{3}$	1	0	0	0
	-2	P_3	$\frac{2}{3}$	0	-1	1	0
	-3	P_4	$\frac{22}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1
		z_j	$-\frac{86}{3}$	-2	3	-2	-3
		Δ_j	$-$	0	-2	0	0

Deoarece $\Delta_2 = -2 < 0$, iar $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{22} = -1 < 0$, $\alpha_{32} = -\frac{1}{3} < 0$, rezultă că $(\min)f = -\infty$. Într-adevăr, luând $x_2 = M > 0$, $x_1 = \frac{8}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}+M$, $x_4 = \frac{22}{3} + M$, avem

$$f(x) = -\frac{86}{3} - 2M$$

şi astfel când $M \to \infty$, obţinem $f \to -\infty$.

6.4.3 Degenerare în problemele de programare liniară

Considerăm problema de P.L. standard

$$(\min) f(x) = cx$$

$$Ax = b$$

$$x \geq \theta.$$

Aceasta, conform Definiţiei 6.2.3, va avea o soluţie degenerată dacă numărul componentelor sale strict pozitive este mai mic decât m, adică cel puţin o necunoscută principală are valoarea zero (în vectorul coloană b există zerouri). Situaţia de degenerare într-o problemă de P.L., apare, fie la început, fie pe parcurs, când la introducerea în bază a unui vector există mai multe elemente pozitive care furnizează acelaşi raport minim. În această ultimă situaţie apare aşa numitul **fenomen de ciclare**. Pentru a evita acest fapt, elementul pivot, se demonstrează, va fi ales acela care furnizează cea mai mică linie în **ordonarea lexicografică**.

Definiţia 6.4.1 *Linia* $(b_1; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *este mai mică în* **ordine lexicografică** *decât linia* $(b_2; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *dacă* $b_1 < b_2$*, sau* $b_1 = b_2$ *şi* $x_1 < y_1$*, sau* $b_1 = b_2$*,* $x_1 = y_1$ *şi* $x_2 < y_2$*, sau şi aşa mai departe* $b_1 = b_2$*,* $x_1 = y_1, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}$ *şi* $x_n < y_n$*.*

Exemplul 6.4.3. Să se rezolve problema de P.L. standard:

$$(\max) f(x) = x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 6 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 6 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & & = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Înlocuim cerinţa de maxim prin

$$(\min)(-f(x)) = -x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 2x_4.$$

Acum, utilizând algoritmul simplex, avem:

			c	-1	-4	-5	-2	
	C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	
		e_1	6	3	1	1	1	
$\underset{e_2}{\overset{P_2}{\rightleftarrows}}$		e_2	6	1	2	1	1	
		e_3	7	2	1	3	0	
$\underset{e_1}{\overset{P_1}{\rightleftarrows}}$		e_1	3	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	-4	P_2	3	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
		e_3	4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
	-1	P_1	$\frac{6}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
	-4	P_2	$\frac{12}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$\underset{e_2}{\overset{P_3}{\rightleftarrows}}$		e_3	$\frac{11}{5}$	0	0	$\frac{11}{5}$	$-\frac{4}{5}$	
	-1	P_1	1	1	0	0	$\frac{3}{11}$	
	-4	P_2	2	0	1	0	$\frac{6}{11}$	Prima soluţie de bază
	-5	P_3	1	0	0	1	$-\frac{4}{11}$	
		z_j	-14	-1	-4	-5	$-\frac{7}{11}$	
		Δ_j	–	0	0	0	$-\frac{15}{11}$	
	-2	P_4	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	0	1	
	-4	P_2	0	-2	1	0	0	
	-5	P_3	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	1	0	
		z_j	-19	-4	-4	-5	-2	
		Δ_j	–	3	0	0	0	

La tabelul care a dat prima soluţie de bază avem $\Delta_4 = -\frac{15}{11} < 0$,iar raportul minim $\lambda = \frac{11}{3}$ este obţinut şi pe linia lui P_1 şi pe linia lui P_2. Cum $b_2 = 1 < b_2 = 2$, rezultă că în ordinea lexicografică linia lui P_1 este mai mică decât linia lui P_2. Aşa că la acest pas s-a ales elementul pivot $\frac{3}{11}$ din linia lui P_1.

Soluţia optimă obţinută este degenerată

$$x^{(1)} = \left(0, 0, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right), \text{ pentru care } (\min)(-f) = -19.$$

Soluţia $x_1^{(1)}$ este soluţie optimă şi pentru problema de P.L. de maxim, când $(\max)f = -\min((-f) = 19$.

6.5 Rezolvarea problemei generale de programare liniară

Într-o problemă generală, de programare liniară unele restricţii apar şi sub formă de inecuaţii (vezi Observaţia 6.2.2). Rezolvarea unei astfel de probleme se face prin transformarea ei într-una standard, prin introducerea **necunoscutelor de compensare**.

Astfel, pentru o restricţie de forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

considerăm necunoscuta de compensare $x_{n+1} \geq 0$ şi transformăm inecuaţia în ecuaţie astfel

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

Pentru o restricţie de forma

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \geq b_k$$

considerăm necunoscuta de compensare $x_{n+2} \geq 0$ şi transformăm inecuaţia în ecuaţie, astfel

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k$$

Câte restricţii de tip inecuaţie avem, atâtea necunoscute de compensare vom introduce.
În funcţia de eficienţă necunoscutele de compensare se introduc cu coeficienţii egali cu zero.

În soluţia optimă din tabelul simplex s-ar putea să apară şi unele necunoscute de compensare, dar în soluţia obţinută a problemei de P.L. generală acestea nu se consideră.

Exemplul 6.5.1. Să se rezolve problema generală de P.L.:

$$(\min) f(x) = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = 7 \\ 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & \geq 5 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & \leq 10 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Transformăm problema generală în una standard, introducând variabile de compensare x_5, x_6, x_7:

$$(\min) f(x) = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & & & & = 7 \\ 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & -x_5 & & & = 5 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & & +x_6 & & = 10 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Acum, aplicăm algoritmul simplex şi avem:

			c	3	-2	4	-1	0	0	0
	C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
		e_1	7	2	3	-1	1	0	0	0
$\underset{e_2}{\overset{P_2}{\rightleftarrows}}$		e_2	5	5	2	1	-1	-1	0	0
	0	P_6	10	1	1	2	2	0	1	0
	0	P_7	9	2	2	1	1	0	0	1
$\underset{e_2}{\overset{P_2}{\rightleftarrows}}$		e_1	5	0	$\frac{11}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0
	3	P_1	1	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0
	0	P_6	9	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0
	0	P_7	7	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1
	-2	P_2	$\frac{25}{11}$	0	1	$\frac{-7}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{2}{11}$	0	0
	3	P_1	$\frac{1}{11}$	1	0	$\frac{5}{11}$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{3}{11}$	0	0
	0	P_6	$\frac{84}{11}$	0	0	$\frac{24}{11}$	$\frac{20}{11}$	$\frac{1}{11}$	1	0
	0	P_7	$\frac{47}{11}$	0	0	$\frac{15}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{2}{11}$	0	1
		z_j	$-\frac{47}{11}$	3	-2	$\frac{29}{11}$	$-\frac{29}{11}$	$-\frac{13}{11}$	0	0
		Δ_j	$-$	0	0	$\frac{15}{11}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{13}{11}$	0	0

Cum toţi $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1,7}.$ rezultă că soluţia problemei de P.L. standard este

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{11}, \frac{25}{11}, 0, 0, 0, \frac{84}{11}, \frac{47}{11}\right), (\min) f(x) = -\frac{47}{11},$$

iar a problemei generale

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{11}, \frac{25}{11}, 0, 0\right), (\min) f(x) = -\frac{47}{11},$$

caz în care nu am mai luat în seamă valorile necunoscutelor de compensare.

6.6 Dualitatea în problemele de programare liniară

Plecând de la o problemă de P.L., totdeauna se poate formula o nouă problemă de P.L., folosind aceleaşi date numerice ale problemei date, care însă să ceară determinarea valorii optime contrare. Între soluţiile celor două probleme de P.L. există strânse legături.

Perechea de probleme de P.L. astfel construite respectă un principiu general din ştiinţă, în particular din matematică, numit **principiul dualităţii**, iar problemele respective sunt numite **probleme duale** (se mai întâlneşte şi termenul de **probleme conjugate**) una alteia. De obicei problema de P.L. iniţială se numeşte **primală**, iar cea obţinută prin dualitate se numeşte **duală**.

Noţiunea de dualitate în problemele de P.L. are, pe lângă însemnătatea teoretică, şi o mare importanţă practică, deoarece, fiind date două probleme duale, există posiblitatea alegerii pentru rezolvare a problemei mai convenabile din punct de vedere calculatoriu.

Mai exact, tabelul simplex, ce conţine soluţia optimă a unei probleme, cuprinde soluţia optimă a problemei duale, componentele acestei soluţii se află pe linia diferenţelor Δ_j ale acestui tabel, în dreptul vectorilor (necunoscutelor) de compensare corespunzător problemei duale. În caz că avem mai puţin de m vectori (necunoscute de compensare) se adaugă vectori unitari e_j în completare (numiţi **vectori ajutători sau artificiali**), cu coeficienţi zero pe linia lui c.

Definiţia 6.6.1 *Spunem că într-o problemă de P.L. avem o* **restricţie concordantă** *dacă ea conţine semnul "$\geq$" într-o problemă de minim şi, respectiv, semnul "$\leq$" într-o problemă de maxim.*

Definiţia 6.6.2 *Spunem că într-o problemă P.L. avem o* **restricţie neconcordantă** *dacă ea conţine semnul "$\leq$" într-o problemă de minim şi, respectiv, semnul "$\geq$" într-o problemă de maxim.*

Prin urmare, într-o problemă de P.L. avem următoarele categorii de restricţii: concordante, neconcordante şi egalităţi.

Pentru a cuprinde toate situaţiile posibile vom considera că şi pentru necunoscute (variabile) putem avea următoarele categorii: nenegative, ($x_j \geq 0$), nepozitive ($x_j \leq 0$) şi libere ($x_j \in \mathbb{R}$).

Acum, putem da regulile de corespondenţă în formarea problemelor de P.L.

P.L. primal	P.L. dual
minim	maxim
maxim	minim
necunoscută nenegativă	restricţie concordantă
necunoscută nepozitivă	restricţie neconcordantă
variabilă liberă	restricţie egalitate
restricţie concordantă	variabilă nenegativă
restricţie neconcordantă	variabilă nepozitivă
restricţie egalitate	variabilă liberă
număr de necunoscute (variabile)	număr de restricţii
număr de restricţii	număr de necunoscute (variabile)
termenii liberi ai restricţiilor	coeficienţii funcţiei obiectiv
coeficienţii funcţiei obiectiv	termenii liberi ai restricţiilor
coloanele matricei restricţiilor	liniile matricei restricţiilor
necunoscute principale	necunoscute de compensare
necunoscute de compensare	necunoscute principale
coloana "b" din tabelul simplex	linia "Δ_j" din tabelul simplex (eventual cu semn schimbat)
linie "Δ_j" din tabelul simplex	coloana "b" din tabelul simplex (eventual cu semn schimbat)

Exemplul 6.6.1. Se dă problema primală de P.L.

$$(\min) f(x) = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 & +3x_2 & \geq 24 \\ 5x_1 & +9x_2 & \geq 45 \\ 3x_1 & -4x_2 & \geq -44 \\ -x_1 & & \geq -8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 > 0.$$

Să se scrie duala acestei probleme.

Având patru restricţii şi, respectiv, două necunoscute din programul primal, vom avea patru necunoscute şi, respectiv, două restricţii. Aşadar, programul dual va avea forma:

$$(\max) g(y) = 24y_1 + 45y_2 - 44y_3 - 8y_4$$

(termenii liberi ai restricţiilor au devenit coeficienţii funcţiei obiectiv),

$$\begin{cases} 4y_1 & +5y_2 & +3y_3 & -y_4 & \leq 1 \\ 3y_1 & +9y_2 & -4y_3 & & \leq 1 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Exemplul 6.6.2. Fie dată problema principală de P.L.:

$$(\max) f(x) = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4,$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 5 \\ 7x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +x_4 & \leq 1 \\ 3x_1 & +5x_2 & +10x_3 & +15x_4 & \leq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4},$$

duala ei are forma:

$$(\min) g(y) = 5y_1 + y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} y_1 & +7y_2 & +3y_3 & \geq 2 \\ y_1 & +5y_2 & +5y_3 & \geq 1 \\ y_1 & +3y_2 & +10y_3 & \geq 3 \\ y_1 & +y_2 & +15y_3 & \geq 3 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Exemplul 6.6.3. Pentru problema primală de P.L.

$$(\min) f(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & \geq 6 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & \leq 8 \\ 2x_1 & & -x_3 & = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3},$$

duala are forma

$$(\max) g(y) = 6y_1 + 8y_2 + 5y_3$$

$$\begin{cases} y_1 & +y_2 & +2y_3 & \leq 6 \\ 2y_1 & -2y_2 & & \leq 8 \\ y_1 & +3y_2 & -y_3 & \leq 5 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \leq 0, \quad y_3 \text{ liberă (oarecare)}.$$

Am văzut până acum o primă legătură între problemele duale de programare, în sensul că una se obţine din cealaltă prin mijloacele menţionate mai sus.

În continuare vom prezenta o altă legatură, sub aspectul unor relaţii dintre soluţii şi funcţiile de eficienţă.

Să considerăm problemele duale, scrise matricial:

$$(1)\quad \overset{\text{P.L. primală}}{\begin{cases} (\min)f(x) = cx \\ Ax = b \\ x \geq \theta \end{cases}} \qquad (2)\quad \overset{\underline{\text{P.L. duală}}}{\begin{cases} (\max)g(y) = {}^t by \\ {}^t Ay \leq {}^t c \\ y \text{ arbitrar} \end{cases}}$$

unde ${}^t y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Teorema 6.6.1 *Dacă $x^{(0)}$ şi $y^{(0)}$ sunt soluţii posibile oarecare ale problemelor (1) şi (2), atunci*

$$g(y^{(0)}) = {}^t by^{(0)} \leq cx^{(0)} = f(x^{(0)}).$$

Demonstraţie. Din faptul că $x^{(0)}$ şi $y^{(0)}$ sunt soluţii posibile ale problemelor (1) şi (2) respectiv, avem:

$${}^t Ay^{(0)} \leq {}^t c, \text{ cu } y^{(0)} \text{ arbitrar,}$$

respectiv

$$Ax^{(0)} = b, \text{ cu } x^{(0)} \geq 0.$$

Astfel putem scrie

$$g(y^{(0)}) = {}^t by^{(0)} = {}^t(Ax^{(0)})y^{(0)} = ({}^t x^{(0)} {}^t A)y^{(0)} = {}^t x^{(0)}({}^t Ay^{(0)}) \leq {}^t x^{(0)} {}^t c =$$

$$= {}^t(cx^{(0)}) = {}^t f(x^{(0)}) = f(x^{(0)}),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 6.6.2 *Pentru problemele duale (1) şi (2) de programare liniară au loc una şi numai una din următoarele situaţii:*

a) ambele probleme au soluţii optime finite şi atunci $(\min)f = (\max)g$*;*

b) una din probleme are soluţie infinită, iar cealaltă este incompatibilă (nu are soluţie);

c) una dintre probleme are soluţie degenerată, iar cealaltă problemă poate avea soluţii multiple.

Demonstraţie. a) Fie $x^{(1)}$ o soluţie optimă a problemei (1) şi $y^{(1)}$ o soluţie optimă a problemei (2).

Din Teorema 6.6.1 avem

$$\min f(x) = f(x^{(1)}) \geq g(y^{(1)}) = \max g(y).$$

Acum, din obţinerea tabelului simplex rezultă că dacă notăm cu Γ matricea de tipul $m \times m$ din A, dată de vectorii principali P_j care dau soluţia optimă $x^{(1)}$, atunci $x^{(1)} = \Gamma^{-1}b$. Analog avem ${}^t y^{(1)} = c_B \Gamma^{-1}$.

Atunci rezultă

$$f(x^{(1)}) = c_B x^{(1)} = c_B \Gamma^{-1} b = {}^t y^{(1)} b = g(y^{(0)}),$$

adică $\min f(x) = \max g(y)$.

În mod analog se stabilesc acum, fără mare greutate şi punctele b) şi c) ale teoremei.

Observaţia 6.6.1 *Teoremele 6.6.1 şi 6.6.2 poartă numele de* **teoreme ale dualităţii**.

Ele ne justifică cele afirmate la începutul paragrafului: prin rezolvarea uneia dintre problemele duale avem şi soluţia celeilalte. De aceea, practic putem alege pe cea în care calculele sunt mai simple.

Exemplul 6.6.4. Să considerăm problema de P.L. din exemplul 6.6.1. Aici se observă că este mai convenabil să rezolvăm problema duală deoarece ea conţine numai două restricţii. O aducem la forma standard, introducând variabilele de compensare y_5 şi y_6

$$(\max) g(y) = 24y_1 + 45y_2 - 44y_3 - 8y_4$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 - y_4 + y_5 = 1 \\ 3y_1 + 9y_2 - 4y_3 + y_6 = 1 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}$$

Aplicând algoritmul simplex, obţinem:

			c	24	45	-44	-8	0	0
	C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
	0	P_5	1	4	5	3	-1	1	0
$\overset{P_2}{\underset{P_6}{\rightleftarrows}}$	0	P_6	1	3	9	-4	0	0	1
		z_j	0	0	0	0	0	0	0
		Δ_j	–	24	45	-44	-8	0	0
$\overset{P_1}{\underset{P_5}{\rightleftarrows}}$	0	P_5	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{47}{9}$	-1	1	$-\frac{5}{9}$
	45	P_2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
		z_j	5	15	45	-20	0	0	5
		Δ_j	–	9	0	-24	-8	0	-5
	24	P_1	$\frac{4}{21}$	1	0	$\frac{47}{21}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{5}{21}$
	45	P_2	$\frac{1}{21}$	0	1	$-\frac{25}{21}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$
		z_j	$\frac{47}{7}$	24	45	$\frac{1}{7}$	$-\frac{25}{7}$	$\frac{27}{7}$	$\frac{20}{7}$
		Δ_j	–	0	0	$-\frac{309}{7}$	$-\frac{29}{7}$	$-\frac{27}{7}$	$-\frac{20}{7}$

Cum toate $\Delta_j \leq 0$, rezultă că $y^{(1)} = \left(\frac{4}{21}, \frac{1}{21}, 0, 0\right)$ este soluţie optimă pentru problema duală, cu $\min g(y) = \frac{47}{7}$. De pe linia lui Δ_j, în dreptul vectorilor de compensare P_5 şi P_6, găsim soluţia problemei primale:

$$x^{(1)} = \left(\frac{27}{7}, \frac{20}{7}, 0, 0\right), \text{ cu } \max f(x) = \frac{47}{7}.$$

Observaţia 6.6.2 *Există situaţii în care rezolvarea unei probleme de P.L. se lungeşte prin calculele care conduc la determinarea unei baze formată din vectorii P_j ai problemei. Este preferabil ca într-o astfel de situaţie să lucrăm cu b în care avem şi componente $b_i < 0$, folosind un algoritm simplex modificat, aplicat asupra problemei duale, numit* **algoritmul (metodă) simplex modificat (dual)**.

Paşii de lucru sunt aceeaşi, deosebindu-se de metoda simplex primală numai prin următoarele:

1) **Criteriul de ieşire din bază**. Pe coloana lui b se alege

$$b_{i_0} = \min_{b_i < 0}\{b_i\}.$$

2) **Criteriul de intrare în bază.** Dacă pe linia lui b_{i_0} toate elementele $\alpha_{i_0 j}$ sunt nenegative, atunci problema este imposibilă. Dacă există $\alpha_{i_0 j} < 0$, atunci determinăm

$$\alpha_{i_0 j_0} = \min_{\alpha_{i_0 j} < 0} \left| \frac{\Delta_j}{\alpha_{i_0 j}} \right|,$$

urmând ca vectorul corespunzător lui $\alpha_{i_0 j_0}$ să intre în noua bază.

Se aplică repetat aceşti paşi până când $b \geq \theta$ şi Δ_j verifică condiţiile din simplex primal, situaţie în care b dă soluţia optimă.

Exemplul 6.6.5. Să se rezolve problema de P.L.:

$$(\min) f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \geq 7 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & \geq 6 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \geq 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Se observă că dacă am lucra cu problema primală necunoscutele de compensare ar fi introduse cu coeficienţii -1 deci vectorii de compensare nu ar putea fi folosiţi în baza iniţială.

Înmulţind cu -1 restricţiile, obţinem problema de P.L.:

$$(\min) f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} -3x_1 & -2x_2 & -x_3 & \le -7 \\ -x_1 & +x_2 & -2x_3 & \le -6 \\ -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \le -8 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Acum introducem variabilele de compensare x_4, x_5 şi x_6 şi problema ia forma:

$$(\min) f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} -3x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & & & = -7 \\ -x_1 & +x_2 & -2x_3 & & +x_5 & & = -6 \\ -2x_1 & -x_2 & +x_3 & & & +x_6 & = -8 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Cum $b \le \theta$ este mai convenabil să aplicăm algoritmul simplex dual.

Avem:

			c	4	5	3	0	0	0
	C_B	B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
	0	P_4	-7	-3	-2	-1	1	0	0
	0	P_5	-6	-1	1	-2	0	1	0
$\overset{P_1}{\underset{P_6}{\rightleftarrows}}$	0	P_6	-8	-2	-1	1	0	0	1
		z_j	0	0	0	0	0	0	0
		Δ_j	–	4	5	3	0	0	0
	0	P_4	5	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{3}{2}$
$\overset{P_3}{\underset{P_5}{\rightleftarrows}}$	0	P_5	-2	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
	4	P_1	4	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$
		z_j	16	4	2	-2	0	0	-2
		Δ_j	–	0	3	5	0	0	2
	0	P_4	7	0	-2	0	1	-1	-1
	3	P_3	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
	4	P_1	$\frac{22}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$
		z_j	20	4	-1	3	0	-2	-1
		Δ_j	–	0	6	0	0	2	1

Cum $b \ge \theta$ şi $\Delta_j \ge 0$, $j = \overline{1,6}$, rezultă că avem soluţia optimă:

$$x^{(1)} = \left(\frac{22}{5}, 0, \frac{4}{5}\right), \min f(x) = 20$$

Observaţia 6.6.3 *Dualitatea în problemele de P.L. se poate interpreta şi economic. Astfel, problema primală*

$$\begin{cases} (\max) f(x) = cx \\ Ax \le b \\ x \ge \theta \end{cases}$$

reprezintă modelul unui proces economic în care se realizează n produse, folosind m resurse, a_{ij} reprezentând unitatea din resursa i utilizată la produsul j, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, b_i–cantitatea disponibilă din resursa i, $i = \overline{1,m}$; c_j venitul pentru o unitate din produsul j şi x_j numărul de unităţi realizate din produsul j, $j = \overline{1,n}$ (vezi §1.3). Funcţia obiectiv reprezintă venitul total realizat. În problema primală se cere să se determine numărul de unităţi din fiecare produs aşa încât venitul să fie maxim.

Acum, să urmărim procesul economic după **criteriul cheltuieli–venit**. Fie y_i preţul fixat pentru unitatea din resurse i, $i = \overline{1,m}$. Costul resursei i în cantitate de b_i unităţi, consumată pentru fabricarea produselor, este $b_i y_i$. Cheltuielile necesare pentru toate resursele folosite sunt

$$g(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m.$$

Cum consumul din resursa i pentru realizarea unităţii de produs j este a_{ij}, costul acestei cote care realizează unitatea de produs j este $a_{ij} \cdot y_i$. Costul total al cotelor din resursele i, $i = \overline{1,m}$, care participă la crearea unităţii de produs j, este $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, care trebuie să satisfacă condiţiile

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Cum dorim ca să avem cheltuieli minime, obţinem problema de P.L.:

$$\begin{gathered}(\min) g(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n} \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n},\end{gathered}$$

care constituie duala problemei primale de maxim.

6.7 Probleme

1. Utilizând algoritmul simplex, rezolvaţi problemele standard de P.L.:

a) $(\min) f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 8 \end{cases}$$
$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,4}$.

b) $(\min) f(x) = 2x_1 + x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 10 \\ x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & = 4 \\ 2x_1 & +5x_2 & & & +x_5 & = 8 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

c) $(\min) f(x) = -x_1 - 2x_3 + x_4$
$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = 12 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +4x_5 & = 13 \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 7 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

d) $(\max) f(x) = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$
$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +3x_4 & = 11 \\ 5x_1 & +7x_2 & +12x_3 & +4x_4 & = 20 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

e) $(\min) f(x) = 13x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 11x_4 + 3x_5$
$$\begin{cases} 5x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & +4x_5 & = 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & +3x_5 & = 7 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

f) $(\min) f(x) = 9x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 100x_5 + 100x_6$
$$\begin{cases} 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +x_5 & & = 7 \\ 3x_1 & +x_2 & +4x_3 & -x_5 & +x_6 & = 5 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}$

g) $(\max) f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & = 15 \\ 2x_1 & +x_2 & +5x_3 & & = 20 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 10 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

2. Să se rezolve următoarele probleme generale de P.L.:

a) $(\min) f(x) = x_1 + 9x_2 + 3x_3 - 6x_4$
$$\begin{cases} 3x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & \leq 6 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & \geq 15 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$

b) $(\max) f(x) = 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4$
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & \leq 3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +3x_4 & \leq 7 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$

c) $(\min) f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$
$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 2 \\ -2x_1 & +x_2 & & \geq -3 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}$.

d) $(\max) f(x) = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3$
$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & \leq 3 \\ 3x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq 4 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}$.

e) $(\max) f(x) = -3x_1 + 7x_2 - \frac{1}{2}x_3 - 5x_4$
$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 2 \\ -x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & \leq 3 \\ 3x_1 & -x_2 & +x_3 & & \leq 9 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}$.

3. Să se rezolve, prin inermediul problemei duale, următoarea problemă de P.L.:

$$(\max) f(x) = -5x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 & +2x_2 & & \leq 2 \\ -x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq 0 \\ -x_1 & & -x_3 & \leq 1 \\ -x_1 & -x_2 & & \leq 1 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

4. Utilizând algoritmul simplex dual, rezolvaţi problema de P.L.:

$$(\min) f(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \geq 10 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & \geq 5 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \geq 20 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

5. Utilizând problema duală, să se rezolve următoarele probleme de P.L.:

a) $(\min) f(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3$
$$\begin{cases} 4x_1 & +2x_2 & +5x_3 & \geq 60 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & \geq 8 \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}$.

b) $(\min) f(x) = 15x_1 + x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 & +7x_2 & +3x_3 & \geq 2 \\ x_1 & +5x_2 & +5x_3 & \geq 2 \\ x_1 & +3x_2 & +10x_3 & \geq 3 \\ x_1 & +2x_2 & +15x_3 & \geq 3 \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}$.

6. Avem următoarea lansare de producţie:

Produse / Materii prime	P_1	P_2	P_3	Disponibil
M_1	5	7	13	200
M_2	2	3	5	800
Preţ pe unitate	9	13	23	

Să se scrie modelul matematic pentru acastă problemă economică şi să se rezolve.

7. O firmă S.R.L. produce produsele P_1, P_2, P_3 pentru care are un plan lunar de cel puţin 80 de unităţi. Pentru realizarea produselor, se foloseşte de o maşină ce poate fi utilizată lunar cel mult 210 ore. Maşina produce o unitate din P_1 în 3 ore, iar câte o unitate din P_2 sau P_3 în 2 ore. Deoarece nu are spaţii de depozitare mari, cantitatea de produse de tipurile P_1 şi P_2 nu trebuie să depăşească 20 de unităţi. Producerea unei unităţi din produsul P_1 aduce firmei un beneficiu de două unităţi băneşti, iar a unei unităţi din P_2 sau P_3 câte o unitate bănească. Să se proiecteze un plan de producţie care să conducă la un beneficiu maxim.

6.8 Testul Nr. 5 de verificare a cunoştinţelor

1. Definiţi următoarele noţiuni:

   a) Soluţie posibilă a problemei de programare liniară standard;

   b) Soluţie de bază a problemei de programare liniară;

   c) Soluţie nedegenerată a problemei de programare liniară;

   d) Soluţie degenerată a problemei de programare liniară;

   e) Restricţie concordantă într-o problemă P.L.;

   f) Restricţie neconcordantă într-o problemă P.L.

2. Rezolvaţi problema de programare liniară $(min)f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - x_5$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$$

   $x_i \geq 0 \quad , \quad i = \overline{1,5}.$

3. Rezolvaţi problema de programare liniară $(max)f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\ -2x_1 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \end{cases}$$

   $x_i \geq 0 \quad , \quad i = \overline{1,6}.$

4. Rezolvaţi problema deşeurilor minime: Se dispune de baze de fier de 14 m lungime din care trebuie tăiate 500 bucăţi de 8 m, 800 bucăţi de 5,25 m şi 450 bucăţi de 2,5 m. Se cere să se stabilească modul de tăiere care asigură cantitatea minimă de deşeuri.

5. Rezolvaţi problema de programare liniară $(max)f(x) = 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_4 = 11 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

   $x_i \geq 0 \quad , \quad i = \overline{1,4}.$

6. Rezolvaţi problema de programare liniară $(max)f(x) = 4x_1+5x_2+8x_3+2x_4+3x_5$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3+x_4+2x_5=10 \\ x_1-x_2+2x_3-6x_4+3x_5=5 \\ x_1+x_2+x_3-2x_4+2x_5=4 \end{cases}$$

$x_i \geq 0 \quad , \quad i=\overline{1,5}.$

7. Rezolvaţi problema generală de programare liniară $(min)f(x) = 4x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=2 \\ x_1+2x_2+x_3 \leq 5 \\ x_2+x_3 \geq 3 \end{cases}$$

$x_i \geq 0 \quad , \quad i=\overline{1,4}.$

8. Aduceţi următoarea problemă generală de programare liniară la forma canonică: $(max)f(y) = 3y_1 - 4y_2$

$$\begin{cases} y_1+y_2 \leq 8 \\ y_1-y_2 \geq 1 \end{cases}$$

$y_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad y_2 \leq 0.$

9. Găsiţi valoarea optimului următoarei probleme de programare liniară folosind duala ei: $(max)f(x) = -x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \leq 4 \\ -2x_1+x_2 \leq 3 \\ 3x_1-x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0.$

10. Găsiţi valoarea optimului următoarei probleme de programare liniară folosind duala ei: $(max)g(y) = 6y_1 + 8y_2$

$$\begin{cases} 2y_1+y_2 \leq 4 \\ y_1+2y_2 \leq 2 \\ y_1-2y_2 \leq 1 \end{cases}$$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$

Capitolul 7

Elemente de teoria grafurilor

"Matematica este singura ştiinţă în care ştim cu precizie despre ce vorbim şi suntem siguri că o afirmaţie este adevărată sau falsă".

(David Hilbert)

Termenul de "graf" are cu totul altă semnificaţie decât cel de grafic. Prima lucrare de teoria grafurilor a fost scrisă de renumitul matematician elveţian Euler, în 1736, în scopul rezolvării unor jocuri şi amuzamente matematice. Dezvoltarea ulterioară a matematicii şi în special a aplicaţiilor ei în diferite domenii ştiinţifice a dat un impuls puternic dezvoltării teoriei grafurilor. Utilizarea ei în domenii variate, teoretice sau practice, de la probleme economice la fundamentarea deciziilor politice, de la studiul reţelelor electrice la critica textelor, etc., îi conferă în zilele noastre o importanţă aparte.

Folosirea grafurilor în elaborarea programelor de producţie, investiţii, transport, desfacere etc. ale unităţilor economice a devenit o necesitate de prim ordin.

În acest capitol noi vom aborda câteva din conceptele fundamentale ale teoriei grafurilor, precum şi câţiva algoritmi utili în rezolvarea unor probleme economice.

7.1 Noţiuni fundamentale

Fie X o mulţime nevidă şi cel puţin numărabilă de elemente numite **noduri** sau **vârfuri**.

Definiţia 7.1.1 *Numim* **graf** *perechea* (X, Γ)*, unde* $\Gamma \subseteq X \times X$*, adică o mulţime de perechi ordonate sau nu de elemente din* X*.*

Dacă X este o mulţime finită, atunci graful (X, Γ) se numeşte **graf finit**, *În caz contrar se zice că avem un* **graf infinit**.

Putem da pentru graf şi următoarea definiţie echivalentă:

Definiţia 7.1.2 *Numim* **graf** *perechea (X, f), unde f este o funcţie definită pe X cu valori în mulţimea $\mathcal{P}(X)$ a părţilor (submulţimilor) lui X.*

Definiţia 7.1.3 *Dacă toate perechile distincte din Γ sunt ordonate, graful se numeşte* **orientat**. *În cazul contrar, graful se numeşte* **neorientat**.

Pentru un graf orientat (X, Γ) perechea ordonată $(x, y) \in \Gamma$, $x, y \in X$, se numeşte **arc**, x fiind **extremitatea iniţială**, iar y **extremitatea finală** a arcului. În cazul unui graf neorientat o pereche neordonată $(x, y) \in \Gamma$, $x, y \in X$ se numeşte **muchie**.

În continuare noi o să lucrăm numai cu grafuri orientate şi finite, fără a mai specifica acest lucru, menţionând totuşi în câteva locuri şi denumirea noţiunilor corepsunzătoare de la grafurile neorientate.

Un graf orientat şi finit va fi notat prin (X, Γ), unde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ va reprezenta mulţimea vârfurilor, iar Γ mulţimea arcelor.

Un graf (X, Γ) se reprezintă geometric în modul următor: a) fiecare vârf este reprezentat printr-un punct din plan; b) fiecare arc $(x_i, x_j) \in \Gamma$ se reprezintă printr-o linie (dreaptă sau curbă) care uneşte cele două extremităţi şi pe care se află o săgeată cu sensul de la x_i la x_j (vezi fig.1). Dacă x_i coincide cu x_j, zicem că avem o buclă.

Fig.1

Într-un graf neorientat muchia se reprezintă printr-un arc fără săgeată.

Într-un arc (x_i, x_j) vârful x_i se numeşte **predecesorul lui** x_j, iar x_j **succesorul lui** x_i.

Exemplul 7.1.1. Graful (X, Γ) dat prin $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\Gamma = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_5)\}$ este reprezentat în figura 2. În aceeaşi figură este reprezentat şi graful neorientat corespunzător lui.

Fig.2

Definiţia 7.1.4 *Două arce ale grafului* (X, Γ) *se numesc* **adiacente** *dacă au cel puţin o extremitate comună.*

Definiţia 7.1.5 *Într-un graf* (X, Γ) *mulţimea arcelor cu extremitatea iniţială* x_i *se numeşte* **mulţimea arcelor incidente spre exterior** *şi se notează cu* $\Gamma_{x_i}^+$. **Mulţimea arcelor incidente** *spre interior vârfului* x_i *se va nota cu* $\Gamma_{x_i}^-$. *Atunci* $\Gamma_{x_i} = \Gamma_{x_i}^+ \cup \Gamma_{x_i}^-$ *este* **mulţimea arcelor incidente vârfului** x_i.

Definiţia 7.1.6 *Un graf* (X, Γ) *se numeşte* **simetric** *dacă oricare ar fi arcul* $(x_i, x_j) \in \Gamma$ *avem şi* $(x_j, x_i) \in \Gamma$.

Graful (X, Γ) *se numeşte* **antisimetric**, *dacă există un arc* $(x_i, x_j) \in \Gamma$ *astfel încât arcul* $(x_j, x_i) \notin \Gamma$.

Definiţia 7.1.7 *Un graf* (X, Γ) *se numeşte* **complet** *dacă pentru orice* $x_i, x_j \in X$ *din* $(x_i, x_j) \notin \Gamma$ *rezultă* $(x_j, x_i) \in \Gamma$.

Exemplul 7.1.2. Graful din figura 3 este simetric, cel din figura 4 este antisimetric, iar cel din figura 5 este complet.

Fig.3 Fig.4 Fig.5

Definiţia 7.1.8 *Fie* (X, Γ) *un graf. Numim* **graf parţial** *al grafului dat, un graf* (X, Γ_1), *unde* $\Gamma_1 \subset \Gamma$, *adică el se obţine din graful* (X, Γ) *prin suprimarea unor arce.*

Definiţia 7.1.9 *Fie* (X, Γ) *un graf dat. Numim* **subgraf** *al grafului dat, un graf* (X_1, Γ_1), *unde* $X \subset X_1$ *şi* $\Gamma_1 \subset \Gamma$.

Subgraful (X_1, Γ_1) *se obţine din graful* (X, Γ) *prin suprimare a unuia sau a mai multor vârfuri şi a arcelor aferente lor.*

Exemplul 7.1.3. Graful din figura 7 este un graf parţial al celui din figura 6, iar graful din figura $7'$ un subgraf.

Fig.6 Fig.7 Fig.$7'$

Definiţia 7.1.10 *Numim* **drum** *într-un graf o succesiune de arce, adiacente două câte două, la fel orientate, la care extremitatea finală a unui arc coincide cu extremitatea iniţială a arcului precedent.*

Un drum în care extremitatea finală a ultimului arc coincide cu extremitatea iniţială a primului arc se numeşte **circuit**.

Un drum se dă prin scrierea între acolade (sau alte tipuri de paranteze) a succesiunii vârfurilor prin care trec arcele care constituie drumul sau menţionând arcele din care se compune.

Exemplul 7.1.4. În graful din figura 6 putem considera drumurile:

$$d_1 = \{x_1, x_2, x_4, x_3\}, \quad d_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_2, x_4, x_5\}$$

$$d_3 = \{x_2, x_4, x_2\}, \text{ care este un circuit.}$$

Definiţia 7.1.11 *Numărul de arce dintr-un drum se numeşte* **lungimea** *lui.*

Definiţia 7.1.12 *Un drum al unui graf se numeşte* **elementar** *dacă fiecare vârf al său este utilizat o singură dată. În caz contrar, drumul este numit* **neelementar**.

Un drum elementar care trece prin toate vârfurile grafului se numeşte **hamiltonian**, *iar unul neelementar care are aceeaşi proprietate se numeşte drum* **nehamiltonian (prehamiltonian)**.

Definiţia 7.1.13 *Un drum al unui graf se numeşte* **simplu** *dacă utilizează fiecare arc al său o singură dată. În caz contrar, drumul se numeşte compus.*

Un drum simplu care foloseşte arcele grafului se numeşte **eulerian**, *iar unul compus care are aceeaşi proprietate se numşte drum* **neeulerian (preeulerian)**.

Exemplul 7.1.5. În graful din figura 6 drumul $d_1 = \{x_1, x_2, x_4, x_3, x_5\}$ este hamiltonian, dar nu este eulerian. Drumul $d_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_2, x_4, x_3, x_5\}$ este nehamiltonian. Drumul $d_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ este simplu, iar $d_4 = \{x_1, x_2, x_4, x_2, x_4, x_5\}$ este compus.

Observaţia 7.1.1 *Într-un graf neorientat noţiunea de drum este înlocuită cu cea de* **lanţ**, *iar cea de circuit cu cea de* **ciclu**.

Definiţia 7.1.14 *Un graf* (X, Γ) *se numeşte* **conex** *dacă între oricare două vârfuri ale sale există un lanţ. Dacă între oricare două vârfuri ale grafului există un drum, atunci el se numeşte* **tare conex**.

Definiţia 7.1.15 *Un subgraf conex al unui graf conex se numeşte* **componentă conexă** *a grafului, iar un subgraf tare conex al unui graf tare conex se numeşte* **componentă tare conexă**.

Se observă că un graf este conex, respectiv tare conex, dacă şi numai dacă el are o singură componentă conexă, respectiv tare conexă.

Exemplul 7.1.6. În figurile 8 şi respectiv 9 avem reprezentate un graf conex şi respectiv unul tare conex. În figurile 10 şi 11 avem reprezentate un graf neconex şi respectiv unul care nu este tare conex.

Fig.8

Fig.9

Fig.10 Fig.11

Graful din figura 10 are două componente conexe, iar cel din figura 11 are două componente tare conexe.

Definiţia 7.1.16 *Numim* **arbore** *un graf conex şi fără cicluri. Numim* **pădure** *un graf neconex şi fără cicluri.*

Exemplul 7.1.7. În figura 12 avem un arbore, iar în figura 13 o pădure cu 3 arbori:

Fig.12 Fig.13

Definiţia 7.1.17 *Numim* **arborescenţă** *un graf fără circuite, în care: a) un vârf şi numai unul (numit* **rădăcină***) nu este precedat de nici un altul; b) orice alt vârf este precedat de un singur cârf. Vârfurile care nu au succesori se numesc* **frunze** *sau* **vârfuri suspendate (terminale)***.*

Cel mai cunoscut exemplu de arborescenţă este ”arborele genealogic”.
Exemplul 7.1.8. În figura 14 avem o arborescenţă cu rădăcina x_1 şi cu 6 frunze.

Fig.14

Dacă numărul de vârfuri ale unui graf este mare, atunci reprezentarea geometrică devine greoaie. De aceea, s-au căutat alte modalităţi de reprezentare. Cea mai convenabilă s-a dovedit a fi cea cu ajutorul matricelor.

Fie (X, Γ) un graf orientat cu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Definiţia 7.1.18 *Matricea pătratică $B = (b_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, definită astfel*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & , \textit{ dacă } (x_i, x_j) \in \Gamma \\ 0 & , \textit{ dacă } (x_i, x_j) \notin \Gamma \end{cases}$$

se numeşte **booleană (asociată)** *ataşată grafului* (X, Γ)

Exemplul 7.1.9. Fie (X, Γ) graful din figura 15.

Fig.15

Matricea booleană ataşată grafului este

$B =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	0	0
x_2	0	0	0	1	0
x_3	0	1	0	0	1
x_4	0	1	0	0	1
x_5	0	0	0	0	0

Definiţia 7.1.19 *Matricea pătratică* $D = (d_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, *definită astfel*

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & , \textit{ există drum de la } x_i \textit{ la } x_j \\ 0 & , \textit{ nu există drum de la } x_i \textit{ la } x_j, \end{cases}$$

se numeşte matricea drumurilor ataşată grafului (X, Γ).

Exemplul 7.1.10. Pentru graful din figura 15 matricea drumurilor este

$$D = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Definiţia 7.1.20 *Matricea pătratică* $L = (l_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, *definită astfel*

$$l_{ij} = \begin{cases} x_i x_j & , \textit{ dacă } (x_i, x_j) \in \Gamma \\ 0 & , \textit{ dacă } (x_i, x_j) \notin \Gamma \end{cases}$$

se numeşte **matricea latină** *ataşată grafului* (X, Γ).

Exemplul 7.1.11. Pentru graful din figura 15 matricea latină este

$L =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	x_1x_2	x_1x_3	0	0
x_2	0	0	0	x_2x_4	0
x_3	0	x_3x_2	0	0	x_3x_5
x_4	0	x_4x_2	0	0	x_4x_5
x_5	0	0	0	0	0

În rezolvarea unor probleme teoretice sau practice se introduc şi alte tipuri de matrice ataşate unui graf, care se difineşte în cadrul respectiv.

7.2 Algoritmi pentru rezolvarea unor probleme relative la grafuri

În acest paragraf vom prezenta câţiva algoritmi pentru rezolvarea unor probleme relative la grafuri.

7.2.1 Algoritmul lui Yu Chen pentru aflarea matricei drumurilor

În asigurarea unor algoritmi relativi la probleme de teoria grafurilor avem nevoie de operaţiile de adunare booleană ($\dot{+}$) şi înmulţire booleană ($\dot{\times}$), definite după cum urmează

$$\begin{array}{c|cc} \dot{+} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \dot{\times} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Algoritmul lui Yu Chen are următorii paşi:

Pasul 1. Se scrie matricea booleană B a grafului (X, Γ);

Pasul 2. Se adună boolean la prima linie toate liniile corespunzătoare la vârfurile care au cifra 1 pe prima linie. Noile cifre de 1 care apar se marchează cu o $*$.

Pasul 3. Se adună boolean la linia întâi toate liniile corespunzătoare vârfurilor care au cifra 1^* pe prima linie. Noile cifre de 1 care apar se marchează cu $**$. Acest pas se continuă până când nu mai apar cifre noi de 1 pe linia întâi.

Pasul 4. Se aplică paşii 2 şi 3 la fiecare din liniile matricei booleene.

În final, obţine matricea D a drumurilor.

Justificarea algoritmilor este imediată.

Exemplul 7.2.1. Pentru graful din figura 15 să aflăm matricea drumurilor, folosind algoritmul lui Yu Chen.

Scriem matricea booleană ataşată grafului

$$B = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Aplicând paşii algoritmului obţinem

$$D = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1^* & 1^* \\ x_2 & 0 & 1^* & 0 & 1 & 1^* \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1^* & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1^* & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

care este tocmai matricea găsită la Exemplul 7.1.10.

7.2.2 Algoritmi pentru precizarea existenţei circuitelor într-un graf

Vom prezenta doi algoritmi.

Algoritmul marcării cu "$*$". Paşii acestui algoritm sunt:

Pasul 1. Se marchează cu "$*$" toate vârfurile fără succesori;

Pasul 2. Marcăm cu "$*$" toate vârfurile ale căror succesori au fost marcaţi;

Pasul 3. Se continuă procesul de la Pasul 2 până când nu mai putem face marcări.

Dacă toate vârfurile au fost marcate, atunci graful este fără circuite. În caz că a rămas cel puţin un vârf nemarcat, graful este un circuit.

Exemplul 7.2.2. Să cercetăm dacă graful din figura 16 are circuite.

Fig.16

La pasul întâi putem marca doar vârful x_7, fiind singurul fără succesori. La pasul 2 putem marca vârful x_6 deoarece succesorul său x_7 a fost marcat. Nu mai putem face marcare de vârfuri deoarece vârfurile rămase au succesori nemarcaţi. Aşadar, graful dat are circuite.

Algoritmul matricei drumurilor. Cum un circuit este un drum ce începe şi se termină în acelaşi vârf, rezultă că un graf va avea circuite dacă în matricea drumurilor apare cifra 1 pe diagonala principală. Rezultă că, pentru a cerceta dacă un graf are sau nu circuite, este suficient să găsim matricea drumurilor.

Exemplul 7.2.3. Să aplicăm acest algoritm la graful din figura 16. Scriem matricea booleană B:

$$B = \begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Aplicând algoritmul Yu Chen pentru aflarea matricei drumurilor, obţinem:

$$D = \begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1^* & 1 & 1^* & 1^{**} & 1^* \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1^* & 1 & 1^* & 1^* \\ x_3 & 0 & 0 & 1^{**} & 1 & 1^* & 1^{**} & 1^* \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1^* & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Având în D o cifra de 1 pe diagonala principală, conchidem că graful are circuite.

7.2.3 Algoritmi pentru aflarea componentelor tare conexe ale unui graf

Aflarea componentelor tare conexe ale unui graf este importantă pentru practică deoarece se obţine o partiţie a grafului în subgrafele tare conexe.

Algoritmul marcării cu "±". Pasul 1. Se marchează cu "±" un vârf în care intră şi iese cel puţin câte un arc.

Pasul 2. Se marchează cu "±" vârfurile care sunt extremităţi finale pentru arce care pleacă dintr-un vârf marcat cu "±" şi se marchează cu "–" vârfurile iniţiale pentru arce ale căror vârfuri finale sunt marcate cu "–".

Pasul 3. Se aplică repetat pasul 2, până nu se mai pot face marcări. Dacă toate vârfurile au fost marcate cu "±", atunci graful este tare conex, având o sigură componentă tare conexă.

Dacă există vârfuri care nu au fost marcate cu "±", atunci se consideră mulţimea C_1 formată din toate vârfurile marcate cu "±". C_1 formează o primă componentă tare conexă.

Pasul 4. În graful dat se elimină vârfurile din componenta C_1 şi toate arcele aferente acestora. Noului graf (de fapt, subgraf al grafului iniţial) i se aplică Paşii 2–3 până se găsesc toate componentele tare conexe ale grafului.

Pentru a evidenţia geometric (intuitiv) descompunerea grafului dat în componente tare conexe se aranjează vârfurile pe componente şi se trasează arcele din graful iniţial.

Exemplul 7.2.4. Să considerăm graful din figura 17.

Fig.17

Deoarece în vârful x_1 iese şi intră cel puţin câte un arc îl marcăm cu "$\pm$". Apoi marcăm cu "+" vârfurile x_2 şi x_5 şi cu "–" vârful x_3. Acum marcăm cu "–" vârful x_2 şi cu "+" vârfurile x_4 şi x_6. Procesul de marcare nu mai poate continua, rămânând vârfuri care nu sunt marcate cu "$\pm$".

Prima componentă tare conexă a grafului este $C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Suprimăm vârfurile x_1, x_2, x_3 şi arcele adiacente lor şi obţinem graful din figura 18.

Fig.18

Imediat se marchează cu "$\pm$" numai vârfurile x_4 şi x_5, obţinând cea de-a doua componentă tare conexă $C_2 = \{x_4, x_5\}$. Vârful x_6 formează cea de-a treia componentă tare conexă C_3.

În figura 19 prezentăm graful cu vârfurile sale împărţite în componente tare conexe.

Fig.19

Algoritmul lui Yu Chen. Acest algoritm pentru aflarea componentelor tare conexe foloseşte ideea de lucru de la algoritmul lui Chen pentru determinarea matricei drumurilor.

Pasul 1. Se scrie matricea booleană B a grafului (X, Γ).

Pasul 2. Se determină toate drumurile care pleacă din x_1 spre alte vârfuri, procedând ca la paşii 2 şi 3 de la algoritmul Yu Chen pentru determinarea matricei drumurilor, adică se introduc prin adunare booleană toate cifrele de pe linia întâi. Notăm cu V_1 mulţimea vârfurilor care au cifra 1 pe linia întâi astfel obţinută.

Pasul 3. Ca la pasul 2 procedăm pe coloana întâi, determinând toate vârfurile care sunt legate prin drumuri cu x_1. Notăm cu V_2 mulţimea vârfurilor care au cifra 1 pe coloana întâi astfel obţinută.

Pasul 4. Determinăm prima componentă tare conexă, luând $C_1 = (V_1 \cap V_2) \cup \{x_1\}$.

Pasul 5. În matricea B se elimină liniile şi coloanele care au vârfurile în C_1. La matricea obţinută se aplică, din nou paşii 2–5. Se aplică algoritmul până se epuizează vârfurile grafului.

Exemplul 7.2.5. Să considerăm graful din figura 20. Să-i aflăm componentele tare conexe.

Fig.20

Scriem matricea booleană ataşată grafului:

$$B = \begin{array}{c|cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_8 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Determinăm toate legăturile prin drumuri ce pleacă din x_1 spre alte vîrfuri:

·	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	1^{**}	1	1	1^{*}	1^{**}	1^{***}	1^{**}	1^{*}

de unde $V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$.

Procedăm la fel pe coloana întâi, scriind tabelul, pentru economie de spaţiu, tot pe orizontală

x_1	1^{**}		1^{*}				1^{*}	1
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

De aici $V_2 = \{x_1, x_3, x_7, x_8\}$.

Acum găsim prima componentă tare conexă $C_1 = (V_1 \cap V_2) \cup \{x_1\} = \{x_1, x_3, x_7, x_8\}$.

Eliminăm în matricea B liniile şi coloanele corespunzătoare vârfurilor din C_1 şi obţinem matricea

$$B = \begin{array}{c|cccc} \cdot & x_2 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_6 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Cum pe linia lui x_2 în B_1 avem numai cifra 0, deducem că următoarea componentă tare conexă este $C_2 = \{x_2\}$.

Eliminând linia şi coloana corespunzătoare vârfului x_2 din B_1, obţinem

$$B_2 = \begin{array}{c|ccc} & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_4 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 \\ x_6 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Imediat rezultă şi componenta tare conexă $C_3 = \{x_4\}$, rămânând matricea

$$B_3 = \begin{array}{c|cc} & x_5 & x_6 \\ \hline x_5 & 0 & 1 \\ x_6 & 1 & 0 \end{array}$$

pentru care avem:

$$\begin{array}{c|cc} & x_5 & x_6 \\ \hline x_5 & 1^* & 1^* \end{array}, \quad V_1 = \{x_5, x_6\}$$

$$\begin{array}{c|cc} x_5 & 1^* & 1 \\ \hline & x_5 & x_6 \end{array}, \quad V_2 = \{x_5, x_6\}$$

deci mai avem componenta tare conexă $C_4 = \{x_5, x_6\}$.

Observaţia 7.2.1 *Deoarece oricare două vârfuri dintr-o componentă tare conexă sunt legate între ele prin drumuri, rezultă că un graf poate fi reprezentat prin unul care are ca vârfuri componentele tare conexe, arcele de legătură, între ele stabilindu-se după arcele din graful dat. În cazul exemplului nostru obţinem graful din figura 21. Graful astfel obţinut se numeşte* **graful condensat** *ataşat grafului dat.*

Fig.21

Graful condensat este important în rezolvarea multor probleme practice deoarece reduce dimensiunea sistemelor complexe.

7.2.4 Algoritmi pentru aflarea drumurilor hamiltoniene ale unui graf

În multe aplicaţii practice avem de stabilit succesiunea unui număr de operaţii, cu respectarea unei anumite oridini. Din punctul de vedere a teoriei grafurilor aceasta revine la găsirea unui drum hamiltonian în graful asociat aplicaţiei respective.

Algoritmul Yu Chen pentru grafe fără circuite.

Pasul 1. Se determină matricea D a drumurilor ataşată grafului.

Pasul 2. La matricea D se mai adaugă o coloană "a", pe care se trec numărul de cifre 1 de pe fiecare linie din D. Aceste numere se numesc puterile de atingere corespunzătoare vârfurilor grafului (ele reprezintă numărul de vârfuri, care sunt legate prin drumuri plecând din vârful respectiv).

Pasul 3. Dacă pe coloana "a" avem puteri de atingere diferite două câte două, atunci graful are drum hamiltonian. Succesiuna vârfurilor în drumul hamiltonian se obţine în ordinea descrescătoare a puterilor de atingere ($n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0$).

Dacă cel puţin două puteri de atingere sunt egale, atunci graful nu are drumuri hamiltoniene.

Observaţia 7.2.2 *Dacă un graf fără cricuite are drum hamiltonian, atunci el este unic.*

Exem,plul 7.2.6. Fie graful din figura 22. Să cercetăm dacă are drum hamiltonian.

Fig.22

Matricea booleană ataşată grafului este

$$B = \begin{array}{c|cccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\hline
x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
x_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
x_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

iar matricea drumurilor

$$D = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & a \\
\hline
x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_2 & 1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
x_3 & 1^* & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
x_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1^* & 5 \\
x_5 & 1 & 1^* & 1 & 0 & 0 & 1^* & 4 \\
x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Cum pe coloana a avem puteri de atingere diferite două câte două, rezultă că graful admite un drum hamiltonian. Acesta este $d_H = \{x_4, x_5, x_3, x_2, x_6, x_1\}$.

Algoritmul Yu Chen pentru grafuri cu circuite.

Acest algoritm are următorii paşi:

Pasul 1. Se determină componentele tare conexe ale grafului (X, Γ), notate cu $C_1, C_2, \ldots$.

Pasul 2. Se determină graful condensat asociat grafului (X, Γ), care este un graf fără circuite.

Pasul 3. Se determină drumul hamiltonian în graful condensat, când există.

Pasul 4. Se aranjează componentele tare conexe în ordinea dată de drumul hamiltonian determinat la Pasul 3.
Pasul 5. Se scriu toate drumurile hamiltoniene din fiecare componentă tare conexă.
Pasul 7. Stabilim legăturile de la o componentă la alta în funcţie de arcele de incidenţă (legătură) din graful dat, citind apoi toate drumurile hamiltoniene.

Observaţia 7.2.3 *Dacă în graful condensat nu există drum hamiltonian sau între două componente nu există legătură, atunci graful nu are drumuri hamiltoniene.*

Exemplul 7.2.7. Să aflăm drumurile hamiltoniene ale grafului din figura 20.

La exemplul 7.2.5 am găsit componentele tare conexe

$$C_1 = \{x_1, x_3, x_7, x_8\}, C_2 = \{x_2\}, C_3 = \{x_4\}, C_4 = \{x_5, x_6\}$$

şi graful condensat din figura 21.

Se observă că în graful condensat avem drumul hamiltonian

$$d_{CH} = \{C_1, C_3, C_4, C_2\}.$$

Acum, scriem componentele tare conexe în ordinea din drumul d_{CH} şi sub ele scriem toate drumurile hamiltoniene din fiecare componentă:

$$\begin{array}{cccc}
C_1 & C_3 & C_4 & C_2 \\
 & & & \\
\begin{array}{c} x_1x_3x_8x_7 \\ x_7x_8x_1x_3 \end{array} & x_4 & \begin{array}{c} x_5x_6 \\ x_6x_7 \end{array} & x_2
\end{array}$$

Apoi stabilim legăturile între ultimele elemente din drumurile dintr-o componentă şi primele vârfuri din componenta următoare (le indicăm prin săgeţi).

Obţinem drumurile hamiltoniene:

$$d_{1H} = \{x_1, x_3, x_8, x_7, x_4, x_5, x_6, x_2\}$$

$$d_{2H} = \{x_7, x_8, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_2\}$$

Algoritmul matricilor latine. Vom prezenta un procedeu prin care se pot găsi toate drumurile elementare, deci şi cele hamiltoniene, precum şi circuitele hamiltoniene. Fie (X, Γ) un graf.

Vom utiliza matricea latină (Definiţia 7.1.20) $L = (l_{ij})$, unde

$$l_{ij} = \begin{cases} x_ix_j & , \text{ dacă } (x_i, x_j) \in \Gamma \\ 0 & , \text{ dacă } (x_i, x_j) \notin \Gamma, i, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Construim matricea $\widetilde{L}$, obţinută din L prin înlăturarea lui x_i din succesiunea $x_i x_j$, când acasta există.

Acum, definim o înmulţire specială de matrice, numită **înmulţirea latină** şi notată prin "$*$", după cum urmează: a) înmulţirea se face linii prin coloane; b) în locul înmulţirii obişnuite se face o alăturare de elemente, dacă acestea nu se repetă, sau se scrie 0 în caz contrar; c) în locul adunării obişnuite se iau grupele obţinute la b, când avem astfel de grupe. Prescurtat, vom scrie $L * \widetilde{L} = L^2$. Analog, calculăm $L^2 * \widetilde{L} = L^3, \ldots, L^{k-1} * \widetilde{L} = L^k$. Se observă că L^k conţine toate drumurile elementare de lungime k.

Prin urmare, în matricea L^{n-1} figurează toate drumurile hamiltoniene. Dacă dorim să obţinem circuitele hamiltoniene se va calcula L^n, dar admitem, ca excepţie, situaţia de repetare a primului şi a ultimului vârf (cel care închide circuitul).

Exemplul 7.2.8. Pentru graful din figura 23 să se determine drumurile hamiltoniene.

Fig.23

Scriem matricea latină L, iar apoi din ea găsim $\widetilde{L}$ prin suprimarea primei litere:

$$L = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} \\ \hline \mathrm{a} & 0 & \mathrm{ab} & \mathrm{ac} & 0 & 0 \\ \hline \mathrm{b} & 0 & 0 & \mathrm{bc} & 0 & \mathrm{be} \\ \hline \mathrm{c} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{cd} & 0 \\ \hline \mathrm{d} & \mathrm{da} & \mathrm{db} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathrm{e} & 0 & 0 & \mathrm{ec} & 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \widetilde{L} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} \\ \hline \mathrm{a} & 0 & \mathrm{b} & \mathrm{c} & 0 & 0 \\ \hline \mathrm{b} & 0 & 0 & \mathrm{c} & 0 & \mathrm{e} \\ \hline \mathrm{c} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{d} & 0 \\ \hline \mathrm{d} & \mathrm{a} & \mathrm{b} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathrm{e} & 0 & 0 & \mathrm{c} & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Acum calculăm

$$L^2 = L * \widetilde{L} =$$

	a	b	c	d	e
a	0	0	abc	acd	abe
b	0	0	bec	bcd	0
c	cda	cdb	0	0	0
d	0	dab	dac dbc	0	dbe
e	0	0	0	ecd	0

Apoi avem:

$$L^3 = L^2 * \widetilde{L} =$$

	a	b	c	d	e
a	0	acdb	abec	abcd	0
b	bcda	0	0	becd	0
c	0	cdab	0	0	cdbe
d	0	0	$dabc$ $dbec$	0	dabe
e	ecda	ecdb	0	0	0

şi

$$L^4 = L^3 * \widetilde{L} =$$

	a	b	c	d	e
a	0	0	0	abecd	acdbe
b	becda	0	0	0	0
c	0	0	0	0	cdabe
d	0	0	dabec	0	0
e	0	ecdab	0	0	0

În concluzie, graful dat are 6 drumuri hamiltoniene: $d_{1H} = \{a, b, e, c, d\}$, $d_{2H} = \{a, x, d, b, e\}$, $d_{3H} = \{b, e, c, d, a\}$, $d_{4H} = \{c, d, a, b, e\}$, $d_{5H} = \{d, a, b, e, c\}$ şi $d_{6H} = \{e, c, d, a, b\}$.
Pentru a obţine circuitele hamiltoniene se va calcula $L^5 = L^4 * \widetilde{L}$, dar acum se admite ca primul şi ultimul vârf să se repete.

7.2.5 Algoritmi pentru determinarea drumurilor de lungime optimă

În multe probleme practice suntem puşi în situaţia de a ataşa fiecărui arc din graful asociat problemelor respective un număr (timp de deplasare de-a lungul arcului, cost de transport de-a lungul arcului, beneficiu etc.) care, într-o astfel de situaţie, se interpretează ca **lungimea** sau **capacitatea arcului**. De obicei, într-o astfel de problemă practică se cere drumul de lungime optimă (maximă sau minimă).

Vom mai considera că graful asociat problemei nu are circuite, dar are un vârf de intrare x_1 şi un vârf de ieşire x_n.

Algoritmul elementar (Bellman). El are la bază principiul de optimalitate al lui Bellman: **orice politică optimală este formată din subpolitici optimale**.

Prin acest algoritm fiecui vârf x_i i se ataşează un număr d_i, reprezentând lungimea minimă a drumurilor de la x_1 la x_i.

Considerăm $d_1 = 0$. Acum, să presupunem că dorim să găsim pe d_l, unde vârful x_l este succesorul vârfurilor x_i, x_j şi x_k, la care au fost deja calculate numerele d_i, d_j şi d_k. Atunci lungimea minimă d_l de la x_1 la x_l se determină prin formula

$$d_l = \min(d_i + c_{il}, d_j + c_{jl}, d_k + c_{kl})$$

unde c_{il}, c_{jl} şi c_{kl} sunt capacităţile corespunzătoare arcelor (x_i, x_l), (x_j, x_l) şi (x_k, x_l).

În formula lui d_l subliniem în paranteze valoarea pentru care minimul este atins. După determinarea tuturor numerelor $d_1, d_2, \ldots, d_n$, valoarea lui d_n este lungimea minimă a drumului de la x_1 la x_n, iar pornind de la x_n spre x_1 şi citind vârfurile subliniate, obţinem drumul de lungime minimă.

Pentru un drum de lungime maximă se lucrează în mod analog, înlocuind minimul cu maximul.

Exemplul 7.2.9. Pentru graful din figura 24 să se afle drumul de lungime minimă.

Fig.24

Avem succesiv:

$$\begin{aligned}
&d_1 = 0,\\
&d_3 = \min\{\underline{d_1 + 7}\} = 7,\\
&d_2 = \min\{\underline{d_1 + 2}, d_3 + 4\} = \min\{\underline{2}, 10\} = 2,\\
&d_4 = \min\{\underline{d_2 + 3}, d_3 + 9\} = \min\{\underline{5}, 16\} = 5,\\
&d_5 = \min\{\underline{d_2 + 4}, d_4 + 8\} = \min\{\underline{6}, 13\} = 6,\\
&d_6 = \min\{d_5 + 3, \underline{d_4 + 2}\} = \min\{9, \underline{7}\} = 7,\\
&d_7 = \min\{d_5 + 9, \underline{d_6 + 7}\} = \min\{15, \underline{14}\} = 14.
\end{aligned}$$

Prin urmare, lungimea minimă este 14, iar drumul care are această lungime este: $d_{min} = \{x_1, x_2, x_4, x_6, x_7\}$. În figura 24 arcele drumului minim sunt dublate cu linie întreruptă.

Algoritmul Bellman–Kalaba. Ideea de lucru este aceeaşi cu cea de la algoritmul elementar: succesiv,pentru fiecare vârf, se calculează câte o cotă (un număr). Căutăm tot drumuri de lungime minimă. Introducem matricea pătratică $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, definită astfel

$$c_{ij} = \begin{cases} l(x_i, x_j) & , \text{ dacă există arcul } (x_i, x_j) \\ 0 & , \text{ dacă } i = j \\ \infty & , \text{ dacă nu există arcul } (x_i, x_j) \end{cases}$$

unde $l(x_i, x_j)$ este lungimea arcului (x_i, x_j).

Notăm cu l_{ik}, $i = \overline{1,n}$, cota ataşată vârfului x_i la pasul k, unde de obicei, luăm $l_{i,1} = c_{in}$, când se caută drumul de lungime minimă între x_1 şi x_n.

Determinăm valorile l_{ik}, pas cu pas, prin rezolvarea sistemului

$$l_{i,k} = \min_{j=\overline{1,n}} (c_{ij} + l_{j,k-1}), \quad k = 2, 3, \ldots, i = \overline{1,n}.$$

Algoritmul se încheie când $l_{i,k} = l_{i,k+1}$ situaţie în care $l_{1,k}$ reprezintă lungimea minimă a drumului de la x_1 la x_n.

Stabilirea drumului de lungime minimă se face astfel: pornind de la x_n, pentru fiecare arc (x_i, x_j) se decide apartenenţa sa la drumul minim dacă

$$l_{j,k} - l_{i,k} = c_{ij} = l(x_i, x_j).$$

Practic, algoritmul lucrează după următorii paşi:

Pasul 1. Se scrie matricea C.

Pasul 2. Se calculează cotele $l_{i,1}$, $i = \overline{1,n}$. Pentru aceasta matricei C i se adaugă ultima coloană, pe care o notăm cu $l_{i,1}$. Apoi, se înmulţeşte C cu această coloană $l_{i,1}$ după regula: inmulţirea se înlocuieşte cu adunare, iar adunarea cu operaţia de luare a minimului. Rezultă astfel valorile de pe coloana $l_{i,2}$.

Pasul 3. Procesul de la pasul 2 se repetă cu coloana $l_{i,2}$ ş.a.m.d. până se obţin două coloane identice $l_{i,k}$ şi $l_{i,k+1}$.

Exemplul 7.2.10. Să găsim drumul de lungime minimă din graful dat în figura 24 utilizând algoritmul Bellman–Kalaba.

Avem sucesiv

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$l_{i,1}$	$l_{i,2}$	$l_{i,3}$	$l_{i,4}$	$l_{i,5}$
x_1	0	2	7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	15	14	14
x_2	∞	0	∞	3	4	∞	∞	∞	13	12	12	12
x_3	∞	4	0	9	∞	∞	∞	∞	∞	17	16	16
x_4	∞	∞	∞	0	8	2	∞	∞	9	9	9	9
x_5	∞	∞	∞	∞	0	3	9	9	9	9	9	9
x_6	∞	∞	∞	∞	∞	0	7	7	7	7	7	7
x_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	0	0	0

Cum $l_{i,4}$ coincide cu $l_{i,5}$, algoritmul s-a încheiat. Avem

$$l_{min}(x_1, x_7) = l_{1,4} = 14,$$

iar drumul de lungime minimă se află prin selectarea arcelor (x_i, x_j) pentru care $l_{j,k} - l_{i,k} = c_{ij}$. Aceste arce sunt: (x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_6), (x_6, x_7), de unde rezultă că drumul de lungime minimă este $d_{min} = \{x_1, x_2, x_4, x_6, x_7\}$.

Observaţia 7.2.4 *Pentru drumul de lungime maximă matricea C este analoagă numai că în loc de $+\infty$ se ia $-\infty$.*

Teoria grafurilor, ca instrument matematic utilizat în rezolvarea problemelor din diferite domenii, este foarte bogată în algoritmi. Pentru cei care doresc să aprofundeze această minunată colecţie, poate apela la lucrările [8], [9], [20], [27], [3], [24], [15].

7.2.6 Metoda drumului critic

Metoda drumului critic (Critical Path Method – C.P.M.) este un instrument matematic util specialiştilor în rezolvarea programelor complexe de planificare, investiţii, producţie etc. Principiul metodei constă în descompunerea unui program complex în părţi componente, numite **activităţi** sau **operaţii**, la un nivel care să permită corelarea funcţională a acestora, adică să facă posibilă stabilirea intercondiţionărilor între părţile componente. La stabilirea **listei (reţelei) de activităţi** x_i, specialiştii care participă la această operaţie trebuie să precizeze activităţile care condiţionează sau preced în mod necesar activitatea x_i. Astfel, se formează o listă de **ateriorităţi obligatorii**. Cu ajutorul acestor date se construieşte un graf G – **graful asociat** sau **graful program** – în felul următor:

a) fiecărei activităţi i se asociază un arc (x_i, x_j), unde vârful (evenimentul) x_i reprezintă începutul operaţiei, iar x_j sfârşitul ei;

b) vârful x_1 este numai **vârful de început (intrare)** în graf, vârful x_n este numai **vârf de sfârşit (ieşire)**, iar celelalte vârfuri sunt şi de intrare şi de ieşire în graf;

c) condiţionarea (anterioritatea) a două activităţi se reprezintă prin succesiunea arcelor corespunzţoare;

d) fiecărui arc (x_i, x_j) i se asociază un număr nenegativ t_{ij}, semnificând **durata activităţii** respective;

e) nici o activitate nu poate începe înaintea terminării tuturor activităţilor precedente şi nu se poate finaliza după începerea activităţilor următoare.

Graful astfel ataşat unei reţele de activităţi este un graf conex orientat, fără circuite, cu un singur vârf x_1 de intrare în graf şi un singur vârf x_n de ieşire din graf. Acest graf–program evidenţiază legăturile funcţionale (tehnologie, economie ş.a.) dintre activităţi. Menţionăm că un astfel de graf, asociat unui program complex, poartă numele de **reţea de planificare**.

Este evident că într-o reţea de planificare există cel puţin o succesiune de activităţi de la intrare la ieşire. O astfel de succesiune reprezintă un drum de la intrare la ieşire, având o anumită lungime.

În C.P.M. esenţial este de remarcat faptul că **cea mai "lungă" succesiune de activităţi** de la **intrare la ieşire determină durata minimă posibilă de execuţie integrală a programului**.

Această succesiune de activităţi poartă numele de **drum critic** (drumul de lungime maximă). Arcele lui reprezintă **operaţiile critice**, adică acele activităţi pentru care efectuarea lor nu poate întârzia, fără ca să fie afectat termenul de finalizare a întregii lucrări.

Într-o reţea de activităţi pot apare **operaţii** care se desfăşoară **în serie** (una după alta), care în graf se reprezintă ca o succesiune de arce, şi **operaţii** care se desfăşoară în paralel (simultan), care în graf se reprezintă astfel

Această reprezentare poate crea confuzia că un arc (x_i, x_j) reprezintă două acţiuni diferite. Pentru a înlătura acest neajuns, uneori, se introduc aşa numitele **operaţii fictive** de durată zero, aşa cum se arată în figura

Activităţile fictive se desenează punctat şi au durata zero pentru că nu consumă nici timp şi nici resurse.

Având graful unei reţele de activităţi, se trece la determinarea parametrilor programului. Aceştia sunt:

a) **durata drumului critic între două vârfuri** x_i **şi** x_j, notat prin $t_c(x_i, x_j)$ şi obţinut prin valoarea maximă a duratei drumurilor dintre vârfurile x_i şi x_j;

b) **durata drumului critic al programului** este dată de $t_c(x_1, x_n)$. În realizarea unui program reţea de activităţi ne interesează dacă o operaţie necritică poate fi amântă cu un anumit interval de timp astfel încât nici una din operaţiile care o succed să nu fie stânjenită în privinţa duratei ce i-a fost programată. Asta înseamnă că durata întregului program trebuie să rămână $t_c(x_1, x_n)$;

c) t_i – **timpul cel mai devreme (scurt)** de **realizare a evenimentului** x_i. Avem $t_i = t_c(x_1, x_i)$;

d) t_i^* – **timpul cel mai târziu (lung) de realizare a evenimentului** x_i. Avem

$$t_i^* = t_c(1, n) - t_c(i, n)$$

Se observă că t_i se calculează ca durata drumurilor de lungime maximă parcurgând reţeaua în sens direct, iar t_i^* ca durata drumurilor de lungime maximă obţinute prin parcurgerea reţelei în sens invers.

e) $R(x_i)$ – **rezerva de timp a evenimentului** x_i dată prin formula

$$R(x_i) = t_i^* - t_i.$$

Intervalul $[t_i, t_i^*]$ se numeşte **intervalul de fluctuaţie** al evenimentului x_i adică intervalul în care se va putea realiza evenimentul x_i fără a produce modificări la timpul total de realizae a programului. Pentru evenimentul critic avem $R(x_i) = 0$, iar pentru cele necritice avem $R(x_i) > 0$;

f) $R(x_i, x_j)$ – **rezerva (marja) totală de timp pentru operaţia (activitatea)**(x_i, x_j) reprezintă timpul maxim cu care se poate mări durata activităţii fără să se afecteze durata totală a programului. Avem formula de calcul

$$R(x_i, x_j) = t_i^* - t_i - t(x_i, x_j)$$

unde $t(x_i, x_j)$ reprezintă timpul necesar realizării operaţiei (x_i, x_j);

g) $r(x_i, x_j)$ – **rezerva de timp liberă (marja liberă)** a operaţiei (x_i, x_j) reprezintă partea din rezerva totală cu care se poate dilata durata de realizare a activităţii (x_i, x_j) fără să fie afectat termenul cel mai devreme de realizare a evenimentului x_i. Avem

$$r(x_i, x_j) = t_j - t_i - t(x_i, x_j).$$

h) $r_s(x_i, x_j)$ – **rezerva de timp sigură (marja sigură)** a activităţii (x_i, x_j) se defineşte prin formula

$$r_s(x_i, x_j) = t_j - t_i^* - t_{ij}$$

Dacă $r_s(x_i, x_j) < 0$, atunci se spune că activitatea (x_i, x_j) nu are marjă sigură.

Intervalele de fluctuaţie şi marjele libere măsoară elasticitatea unui program. Cu cât acestea sunt mai mici, cu atât programul este mai rigid.

Determinarea tuturor acestor parametrii ataşaţi unei reţele de planificare se poate realiza prin întocmirea unui tabel de forma:

i	j	t_{ij}	t_i	t_j	t_i^*	t_j^*	$R(x_i)$	$R(x_i, x_j)$	$r(x_i, x_j)$	$r_s(x_i, x_j)$

În prealabil se vor calcula duratele $t_c(x_1, x_i)$, respectiv $t_c(x_i, x_n)$ ale drumurilor critice, folosind algoritmii pentru determinarea drumurilor de lungime maximă. Valorile aflate se pot scrie lângă vârfurile grafului astfel

$$[t_c(x_i, x_j), t_c(x_i, x_n)]$$

Exemplul 7.2.10. Să analizăm programul unei investiţii pentru care dorim să studiem durata şi modul de execuţie. În urma analizei programului, specialiştii au stabilit următorul tabel de operaţii (activităţi), lista de anteriorităţi obligatorii şi durata de execuţie în luni:

Nr. crt.	Denumire activităţii (Notaţia prescurtată)	Anteriorităţi obligatorii	Durata (luni)
1.	Proiectarea (P)	–	8
2.	Eliberarea terenului (E)	P	3
3.	Comenzi utilaje (C, U)	P	4
4.	Organizare şantier – etapa 1 (OS_1)	P	2
5.	Formare cadre calificate (F)	D	11
6.	Execuţie drumuri interioare – etapa 1 (D_1)	$E; OS_1$	3
7.	Execuţii reţele tehnice – etapa 1 (R_1)	$E; OS_1$	6
8.	Livrări, recepţie utilaje (L, U)	C, U	7
9.	Lucrări construcţii montaj – etapa 1 (C_1)	$E; OS_1$	5
10.	Organizare şantier – etapa 2 (OS_2)	OS_1	3
11.	Execuţii drumuri interioare – etapa 2 (D_2)	$D_1; OS_2; R_1$	4
12.	Execuţii reţele tehnice – etapa 2 (R_2)	R_1	6
13.	Lucrări construcţii montaj – etapa 2 (C_2)	L, U, C_1, R_j	11

Ţinând seama de informaţiile din tabelul precedent, obţinem următorul graf pentru reţeaua de planificare.

Acum, folosind algoritmul lui Bellman, determinăm numerele t_i şi t_i^*, trecându-le pe graf între paranteze drepte.

Cu ajutorul parametrilor t_i şi t_i^* întocmim tabelul de mai jos pentru a calcula rezervele (marjele) $R(x_i)$, $R(x_i, x_j)$, $r(x_i, x_j)$ şi $r_s(x_i, x_j)$.

i	j	t_{ij}	t_i	t_j	t_i^*	t_j^*	$R(x_i)$	$R(x_i, x_j)$	$r(x_i, x_j)$	$r_s(x_i, x_j)$
1	2	8	0	8	0	8	0	0	0	0
2	3	4	8	12	8	12	0	0	0	0
2	4	2	8	10	8	23	0	13	0	0
2	5	3	8	11	8	14	0	3	0	0
2	9	11	8	30	8	30	0	11	11	11
3	7	7	12	19	12	19	0	0	0	0
4	8	3	10	14	23	26	13	13	1	-12
5	6	6	11	17	14	24	3	7	0	-3
5	7	5	11	19	14	19	3	2	3	0
5	8	3	11	14	14	26	3	12	0	-3
6	9	5	17	30	25	30	8	8	8	0
7	9	11	19	30	19	30	0	0	0	0
8	9	4	14	30	26	30	12	12	12	0

Drumul critic este $d_{cr} = \{x_1 x_2, x_3, x_7, x_9\}$, fiind marcat în ultimul graf prin săgeţile duble. Operaţiile critice se recunosc în tabelul de mai sus după $R(x_i, x_j) = 0$. Timpul cel mai devreme de încheiere a întregului program este 30 (de luni), adică durata (lungimea maximă) drumului critic.

Examinarea rezervelor de timp permite cunoaşterea posibilităţilor pe care le are la dispoziţie cel care coordonează programul în vederea unei intervenţii optime pentru executarea în termen a proiectului. De exemplu, pentru activitatea $D_2([x_8, x_9])$, cu durata de execuţie 4 luni, deducem că nu poate începe mai devreme de trecerea a 14 luni de la începutul execuţiei programului ($t_8 = 14$). Aşadar, activitatea D_2 poate începe a fi executată în intervalul de fluctuaţie $[14, 26]$, fără a modifica într-un fel timpul minim necesar execuţiei programului de investiţie.

Observaţia 7.2.5 *Atunci când numărul operaţiilor dintr-un program nu este prea mare, pentru analiza grafului, cât şi pentru urmărirea realizării lui, se paote folosi diagrama Gantt. Pentru descrierea ei se procedeză astfel:*

a) se ordonează activităţile (x_i, x_j) după j crescător, cele cu acelaşi j succedându-se în ordinea crescătoare dată de i,

b) se reprezintă prin bare orizontale duratele activităţilor, marcându-le extremităţile lor cu numerele de ordine ale evenimentelor;

c) se reprezintă punctat drumul critic.

Pentru graful programului studiat în exemplul 7.2.10, diagrama Gantt este dată în figura de mai jos.

Diagrama Gantt ne descrie în mod intuitiv fluctuaţiile evenimentelor şi rezervele (marjele) activităţilor din programul studiat.

De exemplu, cu evenimentul 6 se termină activitatea $(5, 6)$ şi începe activitatea $(6, 9)$; rezultă că operaţia $(5, 6)$ s-ar putea amâna cu cel mult 7 unităţi de timp deoarece, în caz contrar, operaţia $(6, 9)$ s-ar deplasa spre dreapta, peste durata întregului program. Rezultă că fluctuaţia evenimentului 6 este de 7 unităţi.

7.3 Problema fluxului optim în reţele de transport

Noţiunea de flux joacă un rol important în domenii de importanţă pentru economie, cum sunt: teoria informaţiei, cibernetică, transport, planificare etc.

În acest paragraf vom studia problema determinării fluxului optim într-o reţea de transport.

7.3.1 Reţele de transport

Fie (X, Γ) un graf orientat.

Definiţia 7.3.1 *Graful orientat* (X, Γ) *se numeşte reţea de transport dacă este fără circuite, are un singur vârf de intrare x_1 ($\Gamma^-_{x_1} = \varnothing$), un singur vârf de ieşire x_n ($\Gamma^+_{x_n} = \varnothing$) şi oricare arc $a \in \Gamma$ are o capacitate pozitivă $c(a)$.*

Definiţia 7.3.2 *Se numeşte* **flux** *într-o reţea de transport o funcţie $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}_+$, care satisface condiţile:*

i) $\varphi(a) \leq c(a)$*, pentru orice arc* $a \in \Gamma$*;*

ii) în orice vârf $x_i \in X$ *avem satisfăcută egalitatea*

$$\sum_{a \in \Gamma^+_{x_i}} \varphi(a) = \sum_{a \in \Gamma^-_{x_i}} \varphi(a),$$

numită **proprietate de conservare***.*

Numărul $\varphi(a)$ se mai numeşte şi fluxul asociat arcului a şi reprezintă, din punct de vedere practic, cantitatea de materie ce trece prin arcul a, ca de exemplu: cantitate de informaţie, număr de produse etc.

Condiţia ii) din Definiţia 7.3.2 exprimă faptul că suma fluxurilor ce intră într-un vârf este egală cu suma fluxurilor ce ies din acel vârf ("legea lui Kirchoff").

Din aceeaşi condiţie ii) rezultă că

$$\sum_{a \in \Gamma^+_{x_1}} \varphi(a) = \sum_{a \in \Gamma^-_{x_n}} \varphi(a).$$

Definiţia 7.3.3 *Numărul real pozitiv* Φ*, definit prin egalitatea*

$$\Phi = \sum_{a \in \Gamma^+_{x_1}} \varphi(a)$$

se numeşte **valoarea fluxului** φ **în reţea***.*

Exemplul 7.3.1. În graful din fig 7.3.1. să se definească un flux şi să se calculeze valoarea fluxului în reţea. În paranteze drepte sunt trecute capacităţile arcelor.

Fig.7.3.1.

Pentru a defini un flux în reţeaua dată de graful 7.3.1. folosim Definiţia 7.3.2.

Funcţia φ definită prin tabelul

Γ	(x_1,x_2)	(x_1,x_3)	(x_1,x_4)	(x_2,x_3)	(x_2,x_5)	(x_3,x_5)	(x_4,x_3)	(x_4,x_5)	(x_4,x_6)	(x_5,x_7)	(x_6,x_5)	(x_6,x_7)
$\varphi(a)$	5	1	7	1	4	2	0	1	6	10	3	3

este un flux în reţea. Valoarea fluxului în reţea este $\Phi = 5+1+7 = 10+3 = 13$. Şi aplicaţia $\varphi_1 : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ dată prin tabelul

Γ	(x_1,x_2)	(x_1,x_3)	(x_1,x_4)	(x_2,x_3)	(x_2,x_5)	(x_3,x_5)	(x_4,x_3)	(x_4,x_5)	(x_4,x_6)	(x_5,x_7)	(x_6,x_5)	(x_6,x_7)
$\varphi_1(a)$	5	2	6	1	4	5	2	1	3	10	0	3

este un flux în reţeaua din fig.7.3.1, iar valoarea fluxului în reţea este

$$\Phi_1 = 5 + 2 + 6 = 10 + 3 = 13$$

Definiţia 7.3.4 *Într-o reţea de transport înzestrată cu fluxul φ arcul a se numeşte* **saturat** *dacă $\varphi(a) = c(a)$. Un drum în reţea se zice că este* **saturat** *dacă conţine cel puţin un arc saturat.*

Definiţia 7.3.5 *Un flux φ pentru care toate drumurile de la x_1 la x_n sunt saturate se numeşte* **flux complet***.*

Exemplul 7.3.2. Pentru fluxul φ asociat grafului din fig.7.3.1. drumul $d = (x_1, x_2, x_5, x_7)$ este saturat deoarece arcele (x_2, x_5) şi (x_5, x_7) sunt saturate. Se verifică imediat că fluxul φ este complet. Într-adevăr, se observă că singurul drum de la x_1 la x_7 care nu trece prin arcul (x_5, x_7) este $d_1 = (x_1, x_4, x_6, x_7)$, care are însă arcul saturat (x_1, x_4).

Fluxul φ_1 nu este complet deoarece drumul $d_1 = (x_1, x_4, x_6, x_7)$ nu este saturat.

Observaţia 7.3.1 *Orice flux se paote transforma într-unul complet. În acest scop pe fiecare drum nesaturat d de la x_1 la x_n se măresc fluxurile arcelor cu cantitatea $k = \min\limits_{a\in d}(c(a) - \varphi(a))$.*

Exemplul 7.3.3. Să considerăm graful din fig.7.3.1. cu fluxul incomplet φ_1. Se observă că singurul drum nesaturat este $d_1 = (x_1, x_4, x_6, x_7)$. Mărim fluxul pe arcele sale cu $k = \min(7-6, 6-3, 14-3) = 1$ şi obţinem arcul saturat (x_1, x_4). Astfel fluxul φ_1 s-a transformat în fluxul complet φ_2 dat prin tabelul:

Γ	(x_1,x_2)	(x_1,x_3)	(x_1,x_4)	(x_2,x_3)	(x_2,x_5)	(x_3,x_5)	(x_4,x_3)	(x_4,x_5)	(x_4,x_6)	(x_5,x_7)	(x_6,x_5)	(x_6,x_7)
$\varphi_2(a)$	5	2	7	1	4	5	2	1	4	10	0	4

Fluxul în reţea este $\Phi_2 = 14$.

7.3.2 Algoritmul lui Ford–Fulkerson pentru determinarea fluxului maxim într-un graf de reţea

În acest paragraf vom descrie un algoritm de marcare iterativă cu $+$ şi $-$ a vârfurilor grafului reţelei de transport. Dacă prin acest proces se va ajunge la marcarea vârfului x_n, atunci fluxul nu este maxim, în caz contrar fluxul complet va fi maxim.

Algoritmul de marcare cu $+$ şi $-$ (Ford–Fulkerson) are următorii paşi:

1) se marchează x_1 cu $+$;

2) dacă x_i este un vârf marcat şi există arcul nesaturat $(x_i, x_j) \in \Gamma$, atunci x_j se marchează cu $+$;

3) dacă vârful x_i este marcat şi există arcul $(x_j, x_i) \in \Gamma$ cu flux pozitiv, atunci x_j se marchează cu $-$;

4) se repetă paşii 2) şi 3) atât timp cât este posibil;

5) dacă prin procedeul de marcare nu s-a ajuns la vârful x_n, atunci fluxul este maxim; dacă prin procesul de marcare s-a ajuns la x_n, atunci fluxul complet nu este maxim şi se trece la pasul următor;

6) se majoreză fluxul cu cantitatea

$$m = \min_{a, a_1 \in L} \{c(a) - \varphi(a), \varphi(a_1)\}.$$

Aici, am notat cu L lanţul care trece prin toate vârfurile marcate de la x_1 la x_n, a tipul de arc din L precizat la pasul 2), iar a_1 tipul de arc din L precizat la pasul 3). Majorarea fluxului se face astfel: cantitatea m se adună la fluxul de pe arcele a şi se scade la fluxul de pe arcele a_1;

7) se reia procesul de marcare a vârfurilor.

Pentru justificarea mai comodă a algoritmuui Ford–Fulkerson introducem noţiuneaa de tăietură într-un graf.

Definiţia 7.3.6 *Numim tăietură în graful* $F = (X, \Gamma)$ *o partiţionare a vârfurilor* X *în două submulţimi* Y *şi* $C(Y)$*, astfel încât* $x_1 \in X$ *şi* $x_n \in C(Y)$*. Notăm prin* Y/X *tăietura determinată de* Y *în graful* G*. Valoarea tăieturii, notată prin* $v(Y/X)$ *este, prin definiţie, suma capacităţilor arcelor cu vârful iniţial în* Y *şi vârful final în* $C(Y)$*, adică*

$$v(Y/X) = \sum_{a \in \Gamma_Y^+} c(a), \text{ unde } \Gamma_Y^+ = \bigcup_{x_i \in Y} \Gamma_{x_i}^+.$$

Propoziţia 7.3.1 *Fie în graful reţea* $G = (X, \Gamma)$ *o tăietură* Y/X*. Pentru orice flux* φ *are loc inegalitatea*

$$\Phi \leq v(Y/X).$$

Demonstraţie. Având în vedere că suma fluxurilor ce intră în Y este egală cu suma fluxurilor ce ies din Y, putem scrie

$$\Phi + \sum_{\substack{i \neq 1 \\ a_{ij} \in \Gamma_Y^-}} \varphi(a_{ij}) = \sum_{a_{ij} \in \Gamma_Y^+} \varphi(a_{ij}),$$

de unde

$$\Phi = \sum_{a_{ij} \in \Gamma_Y^+} \varphi(a_{ij}) - \sum_{\substack{i \neq 1 \\ a_{ij} \in \Gamma_Y^-}} \varphi(a_{ij}) \leq \sum_{a_{ij} \in \Gamma_Y^+} c(a_{ij}) = v(Y/X).$$

Propoziţia 7.3.2 *Dacă utilizând algoritmul lui Ford–Fulkerson nu se poate marca vârful* x_n*, atunci valoarea fluxului* Φ *corespunzător este maximă.*

Demonstraţie. Fie Y mulţimea vârfurilor marcate prin algoritmul lui Ford–Fulkerson. Avem $x_1 \in Y$ şi $x_n \notin Y$. Cum nu se mai poate marca nici un vârf, un arc $a_{ij} = (x_i, x_j)$ cu $x_i \in Y$ şi $x_j \in Y$ verifică $\varphi(a_{ij}) = c(a_{ij})$, iar un arc $a_{ji} = (x_j, x_i)$ cu $x_i \in X$ şi $x_j \notin Y$ verifică $\varphi(a_{ji}) = 0$. Deci:

$$\Phi = \sum_{a_{ij} \in \Gamma_Y^+} \varphi(a_{ij}) - \sum_{\substack{i \neq 1 \\ a_{ij} \in \Gamma_Y^-}} = \sum_{a_{ij} \in \Gamma_Y^+} c(a_{ij}) = v(Y/X).$$

Folosind propoziţia 7.3.1, rezultă că Φ are valoarea maximă.

Teorema 7.3.1 (Ford–Fulkerson). *Într-un graf* $G = (X, \Gamma)$ *valoarea maximă a unui flux* Φ *este*

$$\max_{\varphi} \Phi = \min_{Y/X} v(Y/X).$$

Demonstraţie. Veridicitatea teoremei rezultă din propoziţiile 7.3.1 şi 7.3.2.

Exemplul 7.3.4. Să se determine fluxul maxim în graful reţea de transport dat în fig.7.3.1.

Plecăm de la fluxul complet obţinut în Exemplul 7.3.3. şi începem procesul de marcare a vârfurilor cum este ilustrat în fig.7.3.2.

Fig.7.3.2.

Marcăm mai întâi vârful x_1 cu $+$. Apoi marcăm cu $+$ vârfurile x_2 şi x_3 deoarece arcele (x_1, x_2) şi (x_1, x_3) sunt nesaturate.

Vârful x_4 se marchează cu $-$ pentru că arcul (x_4, x_3) are fluxul pozitiv. Se marchează cu $+$ vârful x_5 şi x_6 deoarece arcele (x_4, x_5) şi (x_4, x_6) sunt nesaturate. În fine, se marchează cu $+$ vârful x_7 deoarece arcul (x_6, x_7) este nesaturat.

Întrucât s-a marcat x_7 deducem că fluxul nu este maxim. El poate fi majorat cu cantitatea $m = \min\{3-2, 2, 6-4, 13-4\} = 1$, minimul fiind luat pe lanţul $L = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7\}$.

Rezultă fluxul complet

Γ	(x_1, x_2)	(x_1, x_3)	(x_1, x_4)	(x_2, x_3)	(x_2, x_5)	(x_3, x_5)	(x_4, x_3)
$\varphi_3(a)$	5	3	7	1	4	5	1

(x_4, x_5)	(x_4, x_6)	(x_5, x_7)	(x_6, x_5)	(x_6, x_7)
1	5	10	0	5

cu valoare $\Phi_3 = 15$.

Încercăm o nouă marcare (al doilea semn $+$ sau $-$). Se poate marca din nou vârfurile lanţului $L = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7)$. Rezultă că fluxul φ_3 nu este maxim. El poate fi majorat cu cantitatea

$$m = \min\{6-5, 2-1, 1, 6-5, 13-5\} = 1.$$

Rezută fluxul complet

Γ	(x_1,x_2)	(x_1,x_3)	(x_1,x_4)	(x_2,x_3)	(x_2,x_5)	(x_3,x_5)	(x_4,x_3)	(x_4,x_5)	(x_4,x_6)	(x_5,x_7)	(x_6,x_5)	(x_6,x_7)
$\varphi_4(a)$	6	3	7	2	4	5	0	1	6	10	0	6

cu valoarea $\Phi_4 = 6 + 3 + 7 = 10 + 6 = 16$.

Deoarece s-a marcat x_7 deducem că trebuie continuat algoritmul Ford–Fulkerson.

Marcăm cu + vârful x_1 (al treilea +) şi se observă că nu se mai pot marca alte vârfuri deoarece arcele (x_1, x_2), (x_2, x_3) şi (x_1, x_4) sunt saturate. Rezultă că fluxul $\Phi_4 = 16$ este maxim. Tăietura cu valoare minimă este dată de mulţimea $Y = \{x_1\}$ cu $v(Y/X) = 6 + 3 + 7 = 16$.

Exemplul 7.3.5. Trei depozite D_1, D_2, D_3 dispun de 11, 10, 13 tone dintr-un produs din care patru consumatori C_1, C_2, C_3, C_4 au nevoie de 9, 8, 9 şi 11 tone. Posibilităţile de transport limitate de capacităţile mijloacelor de transport sunt date în tabelul:

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4
D_1	5	3	0	6
D_2	3	0	9	0
D_3	0	6	1	5

Existenţa numărului 0 ne indică că de la depozitele D respective nu se face nici un transport la consumatorii corespunzători.

Să se determine un plan optim de transport astfel încât să poată fi asigurată integral cererea consumatorilor C_2 şi C_3, iar cererea consumatorilor C_1 şi C_4 în cea mai mare măsură.

Transformăm problema într-un graf de reţea de transport, considerând vârful de intrare x_1, vârfurile x_2, x_3, x_4 corespunzătoare depozitelor D_1, D_2, D_3, vârfurile x_5, x_6, x_7, x_8 corespunzătoare celor patru consumatori şi x_9 vârful de ieşire. Problemei noastre îi corespunde graful din figura 7.3.3.

Fig.7.3.3.

Rezolvarea problemei revine la determinarea unui flux maxim în reţeaua de transport din fig.7.3.3.

Vom utiliza algoritmul lui Ford–Fulkerson.

Mai întâi trebuie să determinăm un flux φ pentru reţea. Prin încercări, respectând condiţiile din Definiţia 7.3.2, construim fluxul

Γ	(x_1,x_2)	(x_1,x_3)	(x_1,x_4)	(x_2,x_5)	(x_2,x_6)	(x_2,x_8)	(x_3,x_5)
φ	7	8	6	4	2	1	0

(x_3,x_7)	(x_4,x_6)	(x_4,x_7)	(x_4,x_8)	(x_5,x_9)	(x_6,x_9)	(x_7,x_9)	(x_8,x_9)
8	5	1	0	4	7	9	1

cu valoarea $\Phi = 21$.

Se observă că fluxul φ este incomplet deoarece drumurile $d_1 = (x_1,x_2,x_5,x_9)$, $d_2 = (x_1,x_2,x_6,x_9)$, $d_3 = (x_1,x_2,x_8,x_9)$, $d_4 = (x_1,x_3,x_5,x_9)$, $d_5 = (x_1,x_4,x_6,x_9)$, $d_6 = (x_1,x_4,x_8,x_9)$ sunt nesaturate.

Pe fiecare din aceste drumuri fluxul poate fi majorat corespunzător cu $k_1 = \min(11-7,5-4,9-4) = 1$, $k_2 = \min(11-7,3-2,8-7) = 1$, $k_3 = \min(11-7,6-1,11-1) = 4$, $k_4 = \min(10-8,3-0,9-4) = 2$, $k_5 = \min(13-6,6-5,8-7) = 1$, $k_6 = \min(13-6,5-0,11-1) = 5$. Obţinem noul flux φ_1:

Γ	(x_1,x_2)	(x_1,x_3)	(x_1,x_4)	(x_2,x_5)	(x_2,x_6)	(x_2,x_8)	(x_3,x_5)
φ_1	11	10	12	4	2	5	2

(x_3,x_7)	(x_4,x_6)	(x_4,x_7)	(x_4,x_8)	(x_5,x_9)	(x_6,x_9)	(x_7,x_9)	(x_8,x_9)
8	6	1	5	6	8	9	10

cu $\Phi_1 = 11 + 10 + 22 = 6 + 8 + 9 + 10 = 33$.

Deoarece prin majorare cu k_3 arcul (x_1,x_2) s-a saturat, drumurile d_1 şi d_2 au devenit saturate prin urmare nu s-au mai putut majora fluxurile pe d_1 şi d_2.

Este evident că fluxul φ_1 este complet deoarece pe fiecare din drumurile de la x_1 la x_9 se află cel puţin un arc saturat.

Acum trecem la îmbunătăţirea fluxului prin folosirea algoritmului Ford–Fulkerson.

Marcăm x_1 cu $+$. Cum arcul (x_1,x_4) este nesaturat, marcăm x_4 cu $+$. Deoarece arcele (x_4,x_6), (x_4,x_7), (x_4,x_8) sunt saturate, rezultă că marcarea nu mai poate fi continuată. Prin urmare, vârful x_9 nu poate fi marcat. Deducem că valoarea fluxului maxim este 33. Tăietura de capacitate minimă este $Y = \{x_1,x_4\}$ cu

$$v(Y/X) = 11 + 10 + 6 + 1 + 5 = 33.$$

Programul optimal dat de fluxul φ_1 se poate reprezenta şi prin tabelul

D_j \ C_j		x_5 C_1	x_6 C_2	x_7 C_3	x_8 C_4	Cantităţi din produse disponibile în depozite	Cantităţi consumate
x_2	D_1	4	2	0	5	11	11
x_3	D_2	2	0	8	0	10	10
x_4	D_4	0	6	1	5	13	13
Cererile consumatorilor		9	8	9	11		
Cereri satisfăcute		6	8	9	10		

Valorile (x_i, x_j) din tabel au fost citite din fluxul optimal φ_1 şi reprezintă cantitatea de produs luată din depozitul x_i şi transportată la consumatorul x_j.

Observaţia 7.3.2 *Algoritmul Ford–Fulkerson se poate utiliza şi la rezolvarea problemei determinării numărului maxim de cuplaje (legături independente) într-un graf bipartit. Un graf* $G = (X, \Gamma)$ *se numeşte bipartit dacă există o partiţie a mulţimii* $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ *astfel încât fiecare arc a lui G are o extremitate în* X_1 *şi cealaltă în* X_2.

7.4 Probleme

1. Reprezentaţi geometric (intuitiv) grafurile:

a) $X = \{x_1, x_2.x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $\Gamma = \{(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_6), (x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_x, x_5), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_2), (x_5, x_6), (x_6, x_1), (x_6, x_2)\}$;

b) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\Gamma = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_5, x_1), (x_5, x_3), (x_5, x_4)\}$;

c) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $\Gamma = \{(x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_5), (x_4, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_6), (x_5, x_6), (x_6, x_5)\}$;

d) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $\Gamma = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_4), (x_5, x_6)\}$;

e) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$, $G = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_2), (x_4, x_5), (x_5, x_2), (x_5, x_6), (x_6, x_2), (x_6, x_4), (x_7, x_4), (x_7, x_6), (x_7, x_8), (x_8, x_1), (x_8, x_4), (x_8, x_7)\}$.

2. Pentru grafurile de la problema 1 rezolvaţi următoarele:

a) determinaţi matricea drumurilor;

b) aflaţi componentele tare conexe;

c) utilizând algoritmului lui Yu Chen, aflaţi drumurile hamiltoniene;

d) folosind algoritmul matricelor latine, găsiţi drumurile hamiltoniene şi circuitele hamiltoniene.

3. Pentru graful

arătaţi drumurile de lungime minimă şi respectiv maximă.

4. Pentru graful

determinaţi drumurile de lungime minimă şi respectiv maximă.

5. O linie de fabricaţie a unei întreprinderi industriale produce 5 produse P_i. $i = \overline{1,5}$. Dacă după produsul P_i se fabrică produsul P_j atunci aveam un cost de trecere c_{ij}. Ştiind că matricea costurilor de trecere este:

$$C = \begin{array}{c|ccccc} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \hline P_1 & 0 & 6 & 9 & 10 & 11 \\ P_2 & 8 & 0 & 5 & 4 & 7 \\ P_3 & 7 & 4 & 0 & 5 & 9 \\ p_4 & 8 & 5 & 8 & 0 & 6 \\ p_5 & 9 & 6 & 11 & 5 & 0 \end{array}$$

să se determine ordinea de execuţie a celor 5 produse astfel încât costul total de lansare, într-un interval de timp, să fie minim .

Indicaţie. Se consideră matricea booleană a grafului ataşat dată prin

$$B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,5}},\ b_{ij} = \begin{cases} 1 & ,\ \text{dacă } c_{ij} < c_{ji} \\ 0 & ,\ \text{dacă } c_{ij} > c_{ji} \\ 0 & \ \text{dacă } i = j. \end{cases}$$

6. Cu notaţiile din paragraful 7.2.6 arătaţi că:

i) $R(x_i, x_j) - r(x_i, x_j) = R(x_j)$;

ii) $r(x_i, x_j) - r_s(x_i, x_j) = R(x_i)$;

iii) $R(x_i, x_j) \geq r(x_i, x_j) \geq r_s(x_i, x_j)$.

7. Utilizând metoda drumului critic, studiaţi programul dat prin graful de mai jos:

8. Să se determine elementele ce caracterizează reţeaua de activităţi dată prin graful de mai jos.

9. Să se determine un flux maxim între x_1 şi x_7 în reţeaua de transport dată prin graful

10. Irigarea a trei terenuri T_1, T_2, T_3 se face cu apa din trei bazine B_1, B_2, B_3 folosind o reţea de canale. Bazinul B_1 are un disponibil de 20 l/s, bazinul B_2 are un disponibil de 16 l/s, iar bazinul B_3 are un disponibil de 8 l/s. Terenul T_1 are nevoie de 11 l/s, terenul T_2 are nevoie de 18 l/s, iar terenul T_3 are nevoie de 13 l/s.

Debitele canalelor din reţeaua de irigaţii sunt date prin graful din figura 1.

Figura 1

i) Să se determine debitul total optim de alimentare cu apă a celor trei terenuri, precizând în acest caz şi debitul de alimentare a fiecărui teren;

ii) Pentru ce canale trebuie să se mărească debitul de apă pentru ca sistemul de irigare să aibă o eficienţă optimă.

11. Să se determine fluxul maxim din reţeaua de transport din figura 2.

Figura 2

7.5 Testul Nr. 6 de verificare a cunoştinţelor

1. Definiţi noţiunile următoare:
   a) Graf;
   b) Graf simetric;
   c) Drum într-un graf;
   d) Drum hamiltonian;
   e) Graf tare conex.
2. Definiţi noţiunile următoare
   a) Arbore;
   b) Matricea booleană ataşată unui graf;
   c) Reţea de transport;
   d) Flux complet într-o reţea de transport.
3. Să se găsească cu ajutorul algoritmului lui Bellman drumul minim $x_1 \rightarrow x_5$ din următorul graf:

4. Găsiţi drumurile, fără circuite, de lungime 1, 2 şi 3 din graful următor

5. Determinaţi cu ajutorul algoritmului lui Bellman drumul de lungime maximă $x_1 \to x_{14}$ din graful următor, precizând şi lungimea acesteia:

6. Găsiţi cu ajutorul algoritmului Bellman - Kalaba drumul minim $x_1 \to x_7$ şi lungimea acestuia din următorul graf:

7. Găsiţi cu ajutorul algoritmului Bellman - Kalaba drumul maxim $x_1 \to x_7$ şi lungimea acestuia din graful de la problema precedentă.

8. Folosind metoda drumului critic să se determine elementele caracteritice ale următoarei reţele de activităţi:

9. Stabiliţi folosind algoritmul marcării dacă următorul graf are circuite:

10. Scrieţi matricea booleană asociată grafului

Capitolul 8

Probleme de transport

"Şi binele şi răul vin pe neaşteptate./ Iar celui ce le preveseşte / nu-i dă crezare nimeni".

(Goethe, Faust)

O **problemă de transport** constă în aflarea unui plan de transport a unui produs, de la anumite centre producătoare (depozite), în scopul satisfacerii cerinţelor unor consumatori şi minimizării cheltuielilor de transport.

Problemele de tip transport se întâlnesc în multe procese economice, ca de exemplu: transporturi de bunuri; proiectarea de canale de energie (informaţii, electricitate), de canale în agricultură; proiectarea de depozite în acelaşi spaţiu productiv; repartiţia optimă a sarcinilor de producţie pe maşini, secţii, întreprinderi, optimizarea unor probleme de producţie şi stocaj etc.

Modelul matematic al problemelor de transport se încadrează în modelul problemelor PL. Având în vedere numărul mare de variabile, rezolvarea unei probleme de transport prin algoritmul simplex este în general puţin eficientă. De aceea, pentru rezolvarea problemelor de tip transport se folosesc tehnici speciale.

Acest capitol este dedicat prezentării, sub o formă simplă, a acestor tehnici.

8.1 Modelul matematic pentru o problemă de transport

O problemă de transport a fost formulată la Capitolul 1, problema 2. Să o formulăm din nou. *Un produs (marfă) se află în depozitele D_1, D_2, ..., D_m cu capacităţile a_1, a_2, ..., a_m şi trebuie transportat(ă) la centrele de consum C_1, C_2, ..., C_n în cantităţile b_1, b_2, ..., b_n. Cunoscând costul transportului* *pe unitate de produs de la depozitul D_i, $i = \overline{1,m}$ la centrul de consum C_j, $j = \overline{1,n}$, notat cu c_{ij}, se cere să se întocmească un astfel de plan de repartiţie a produsului încât costul total al transportului să fie minim.*

Dacă notăm cu x_{ij} cantitatea de produs ce se va transporta de la depozitul D_i, $i = \overline{1,m}$, la centrul de consum C_j, $j = \overline{1,n}$, atunci modelul matematic pentru probleme de transport se scrie astfel:

$$\tag{8.1} \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \\ (\min) f = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \end{cases}$$

Intuitiv, modelul matematic (8.1) al problemei de transport se poate reprezenta prin Tabelul 8.1.

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	$\ldots$	C_n	Disponibil
D_1	c_{11} / x_{11}	c_{12} / x_{12}	$\ldots$	c_{1n} / x_{1n}	a_1
D_2	c_{21} / x_{21}	c_{22} / x_{22}	$\ldots$	c_{2n} / x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
D_m	c_{m1} / x_{m1}	c_{m2} / x_{m2}	$\ldots$	c_{mn} / x_{mn}	a_m
Necesar	b_1	b_2	$\ldots$	b_n	T

Cuplul $\begin{array}{c|c} c_{ij} & \\ \hline & x_{ij} \end{array}$ poartă numele de **căsuţă**.

Algoritmul de rezolvare a unui model de transport cere ca acest model să fie **echilibrat**, adică să fie îndeplinită **condiţia de echilibru**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

adică **totalul disponibilului să fie egal cu totalul necesarului**. Valoarea comună T a acestui total se trece în căsuţa $(m+1, n+1)$.

În caz contrar, modelul se echilibrează prin considerarea, fie a unui depozit fictiv D_{m+1}, fie a unui centru de consum fictiv C_{n+1}, care oferă, sau cere, diferenţa dintre cele două sume. Deoarece cantităţile transportate de la un depozit arbitrar, respectiv la acest centru fictiv, nu există în realitate, costurile de transport corespunzătoare le considerăm nule.

Se observă că într-o problemă de transport cu m depozite şi n centre de consum modelul matematic conţine $m \cdot n$ variabile necunoscute şi cel mult $m+n-1$ restricţii independente (nu s-au inclus condiţiile de nenegativitate). Numărul variabilelor necunoscute fiind evident mai mare ca cel al restricţiilor, rezultă că valorile variabilelor ce verifică sistemul de restricţii nu sunt unic determinate.

O soluţie realizabilă a problemei, care conţine cel mult $(m+n-1)$ componente strict pozitive, se numeşte **soluţie de bază**. Soluţia de bază cu exact $(m+n-1)$ componente pozitive se numeşte **soluţie de bază nedegenerată**, iar în caz contrar, **degenerată**.

Se constată că modelul matematic reprezintă o problemă de programare liniară de o formă specială. Cu toate că în restricţii coeficienţii necunoscutelor sunt 0 sau 1, rezolvarea prin metoda simplex cere un volum de calcule foarte mare. De aceea, se preferă pentru rezolvarea unei probleme de transport o cale cu tehnică specifică.

În general, pentru rezolvarea unei probleme de transport se parcurg etapele:

a) Determinarea (aflarea) unei soluţii iniţiale (de bază, nedegerată);

b) Ameliorarea (îmbunătăţirea) unei soluţii;

c) Aflarea (determinarea) soluţiei optime.

8.2 Determinarea unei soluţii iniţiale

Pentru aflarea unei soluţii iniţiale într-o problemă de transport se cunosc mai multe metode. În cele ce urmează vom prezenta trei metode.

8.2.1 Metoda colţului Nord–Vest

Această metodă constă în a atribui, pe rând, valori variabilelor necunoscute începând cu cea din colţul Nord–Vest al tabelului. Astfel, mai întâi luăm $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Dacă $\min(a_1, b_1) = a_1$, atunci $x_{12} = \ldots = x_{1n} = 0$, iar dacă $\min(a_1, b_1) = b_1$, atunci $x_{21} = x_{31} = \ldots = x_{m1} = 0$. Metoda continuă apoi cu $x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1)$ în prima situaţie, respectiv cu $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$ în cealaltă situaţie. Procesul se repetă până când este repartizată şi ultima cantitate disponibilă.

Exemplul 8.2.1. Se consideră trei furnizori D_1, D_2 şi D_3 care au disponibile corespunzător cantităţile de un anumit produs $a_1 = 50$, $a_2 = 30$ şi $a_3 = 40$. Acestea sunt solicitate de patru consumatori C_1, C_2, C_3 şi C_4 în cantităţile

$b_1 = 45$, $b_2 = 15$, $b_3 = 25$ şi $b_4 = 35$. Cunoscând costurile unitare de transport $3, 2, 1, 1$; $2, 3, 2, 1$ şi $4, 2, 3, 2$ unităţi monetare de la D_1, D_2 şi D_3, să se scrie modelul matematic al problemei de transport, când se urmăreşte minimizarea costului total.

Utilizând metoda colţului Nord–Vest să se găsească o soluţie iniţială.

Dacă notăm cu x_{ij} cantitatea de produs ce se va transporta de la furnizorul D_i, $i = 1, 2, 3$ la beneficiarul C_j, $j = 1, 2, 3, 4$, atunci obţinem următorul model matematic:

$$\begin{array}{lllll}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & = 50 \\
x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & = 30 \\
x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & = 40 \\
x_{11} & +x_{21} & +x_{31} & = 45 & \\
x_{12} & +x_{22} & +x_{32} & = 15 & \\
x_{13} & +x_{23} & +x_{33} & = 25 & \\
x_{14} & +x_{24} & +x_{34} & = 35 &
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

$$(\min) f = 3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} +$$

$$+ 2x_{23} + x_{24} + 4x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 2x_{34}$$

Sub formă tabelară modelul matematic este

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
D_1	3 x_{11}	2 x_{12}	1 x_{13}	1 x_{14}	50
D_2	2 x_{21}	3 x_{22}	2 x_{23}	1 x_{24}	30
D_3	4 x_{31}	2 x_{32}	3 x_{33}	2 x_{34}	40
Necesar	45	15	25	35	120

Pentru aflarea soluţiei iniţiale cu metoda colţului Nord–Vest procedăm astfel: alegem $x_{11} = \min(45, 50) = 45$; atunci $x_{21} = x_{31} = 0$; apoi $x_{12} = \min(15, 5) = 5$ şi $x_{13} = x_{14} = 0$; în continuare $x_{22} = \min(10, 30) = 10$ şi $x_{32} = 0$; mai departe $x_{23} = \min(20, 25) = 20$ şi $x_{24} = 0$ şi în final $x_{33} = 5$ şi $x_{34} = 35$.

De obicei, se determină soluţia iniţială în tabel, micşorându-se de fiecare dată disponibilul şi necesarul respectiv şi scriind alăturat cel rămas. Astfel avem

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
D_1	3 / 45	2 / 5	1 / 0	1 / 0	50; 5; 0
D_2	2 / 0	3 / 10	2 / 20	1 / 0	30; 20; 0
D_3	4 / 0	2 / 0	3 / 5	2 / 35	40; 35; 0
Necesar	45 0	15 10 0	25 5 0	35 0	120

Tabelul 8.2.1.

Valoarea funcţiei cost total pentru soluţia iniţială găsită este

$$f = 3 \cdot 45 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 35 = 300$$

Această metodă este foarte simplă dar puţin eficientă deoarece nu ţine cont de valorile costurilor c_{ij}.

8.2.2 Metoda elementului minim

Metoda constă în a atribui, pe rând, valori variabilelor necunoscute, începând cu aceea la care costul unitar c_{ij} este minim.

Apoi din cele rămase se lucrează tot cu aceea care corespunde costului minim. Dacă sunt mai multe costuri minime egale, atunci se va considera mai întâi acea variabilă care poate lua valoarea mai mare. Valoarea variabilei se va afla ca şi la metoda Nord–Vest, considerând minimul dintre disponibil şi necesar.

Exemplul 8.2.2. Utilizând metoda elementului minim să aflăm o soluţie iniţială pentru problema de transport de la Exemplul 8.2.1.

Deoarece $c_{13} = c_{14} = c_{24} = 1$ este costul minim, mai întâi vor determina valoarea variabilei x_{14} întrucât vom obţine valoarea maximă ($x_{13} = 25$; $x_{14} = 35$; $x_{24} = 30$). Aşadar, luăm $x_{14} = 35$, ceea ce implică $c_{24} = 0$, $x_{34} = 0$. Apoi alegem $x_{13} = 15$ deoarece $c_{13} = 1$ este costul minim din cele rămase. Avem $x_{11} = x_{12} = 0$. Considerând costurile egale cu 2 alegem $x_{21} = 30$ şi $x_{22} = x_{23} = 0$. Acum luăm $x_{32} = 15$, $x_{33} = 10$ şi $x_{31} = 15$.

Ilustrarea intuitivă prin tabel este dată în Tabelul 8.2.2.

Valoarea lui f pentru această soluţie este

$$f = 1 \cdot 15 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 =$$

$$= 50 + 60 + 60 + 60 = 230.$$

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
D_1	3 0	2 0	1 15	1 35	50; 15; 0
D_2	2 30	3 0	2 0	1 0	30; 0
D_3	4 15	2 15	3 10	2 0	40; 0
Necesar	45 15 0	15 0	25 10 0	35 0	120

Tabelul 8.2.2.

8.2.3 Metoda diferenţelor maxime

Valorile variabilelor se atribuie ca şi în cazul metodelor precedente, dar ordinea de atribuire se face după o altă regulă. Pentru stabilirea ordinii de urmat se calculează, pentru fiecare linie, respectiv pentru fiecare coloană, diferenţa dintre cele mai mici două elemente (costuri). Apoi pe linia sau coloana cu diferenţa maximă se determină variabilele din căsuţa cu cost minim. Apoi procedeul se repetă. La diferenţe maxime egale se consideră mai întâi costul minim.

La lucrul cu tabel diferenţele pe linii se trec în stânga tabelului, iar cele pe coloane deasupra tabelului.

Exemplul 8.2.3. Să se afle o soluţie iniţială cu metoda diferenţelor maxime pentru problema de transport din Exemplul 8.2.1.

Calculăm diferenţele pe linii şi coloane. Avem următorul tabel cu diferenţe

$$\begin{array}{cccc|c}
3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\
4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

calculate astfel: $2-1=1$ pentru linia întâi, $2-1=1$ pe linia a doua, $3-2=1$ pentru linia a treia, $3-2=1$ pentru coloana întâi, $3-2=1$ pentru coloana a doua, $2-1=1$ pentru coloana a treia şi $2-1=1$ pentru coloana a patra.

Se observă că avem toate diferenţele egale cu 1. Alegem $x_{14}=35$ deoarece dă cea mai mare repartizare pentru preţurile minime. Atunci $x_{24}=x_{35}=0$.

Recalculăm diferenţele pe liniile şi coloanele rămase, obţinem tabelul

$$\begin{array}{ccc|c}
3 & 2 & 1 & 1 \\
2 & 3 & 2 & 1 \\
4 & 2 & 3 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Toate diferenţele sunt egale. Ţinând seama de costul minim alegem $x_{13} = 15$ şi $x_{11} = x_{12} = 0$.

Pentru liniile şi coloanele necompletate recalculăm diferenţele şi obţinem tabelul

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & \end{array}$$

Diferenţa maximă este 2 şi corespunde coloanei întâi. Alegem $x_{21} = 30$ şi $x_{22} = x_{23} = 0$.

Acum, pe linia a treia luăm $x_{31} = 15$, $x_{32} = 15$ şi $x_{33} = 10$.

Sub formă de tabel calculele arată astfel:

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
D_1	3 / 0	2 / 0	1 / 15	1 / 35	50; 15; 0
D_2	2 / 30	3 / 0	2 / 0	1 / 0	30; 0
D_3	4 / 15	2 / 15	3 / 10	2 / 0	40
Necesar	45 15	15	25 10	35 0	120

Valoarea lui f pe această soluţie iniţială este

$$f = 1 \cdot 15 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = 230$$

Se observă că s-a obţinut aceeaşi soluţie iniţială ca şi la utilizarea metodei elementului minim.

Observaţia 8.2.1 *Toate cele trei soluţii iniţiale găsite pentru problema de transport din Exemplul 8.2.1. sunt soluţii de bază nedegenerate, având* $4 + 3 - 1 = 6$ *componente pozitive.*

8.3 Ameliorarea (îmbunătăţirea) unei soluţii

Pentru a elabora un mod de ameliorare a unei soluţii corespunzătoare unei probleme de transport, adică de a trece de la o soluţie de bază la una mai bună, vom recurge la problema duală.

Problema de transport are modelul matematic dat de (8.1), §8.1. Pentru a scrie duala trebuie să introducem variabilele duale $u_1, u_2, \ldots, u_m$, corespunzătoare primelor m restricţii, şi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ corespunzătoare următoarelor n restricţii. Obţinem

$$(8.2)\quad \begin{cases} u_1+v_1\le c_{11}, & u_1+v_2\le c_{12}, & \ldots, & u_1+v_n\le c_{1n},\\ u_2+v_1\le c_{21}, & u_2+v_2\le c_{22} & \ldots, & u_2+v_n\le c_{2n},\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ u_m+v_1\le c_{m1}, & u_m+v_2\le c_{m2} & \ldots, & u_m+v_n\le c_{mn},\\ u_i, i=\overline{1,m}, & v_j, j=\overline{1,n}, & \text{arbitrare} & \end{cases}$$

$$(\max)g = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n.$$

Teoremele de dualitate (v. Teoremele 6.6.1 şi 6.6.2) ne asigură că o soluţie $X^{(0)} = (x_{ij}^{(0)})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ este optimă dacă variabilele duale verifică restricţiile

$$(8.3)\qquad u_i + v_j = c_{ij},\ \text{dacă } x_{ij}^{(0)} \neq 0 (x_{ij}^{(0)} \text{ este necunoscuta principală})$$

$$(8.4)\qquad u_i + v_j \le c_{ij},\ \text{dacă } x_{ij}^{(0)} (x_{ij}^{(0)} = 0 \text{ este necunoscuta secundară})$$

numite **condiţii de optimalitate** pentru soluţia unei probleme de transport.

Fie $X = (x_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ o soluţie iniţială a problemei de transport.

Căsuţele din tabelul soluţiei cu $x_{ij} \neq 0$ le numim **căsuţe ocupate**, iar cele cu $x_{ij} = 0$ le numim **căsuţe libere**.

Relaţiile (8.3) formează un sistem liniar de $m + n - 1$ ecuaţii (corespunzătoare căsuţelor ocupate) cu $m + n$ necunoscute. Se observă că acest sistem este compatibil nedeterminat. Pentru aflarea unei soluţii putem lua o necunoscută secundară egală cu 0, de obicei vom alege $u_1 = 0$.

Valorile găsite pentru $u_1, u_2, \ldots, u_m$ şi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se trec pe marginea tabelului soluţie în mod corespunzător (de aceea se mai numesc şi **valori marginale**), iar sumele $u_i + v_j$ se scriu în colţul din dreapta sus al căsuţelor ocupate, alături de coeficienţii c_{ij}, adică structura unei astfel de căsuţe ocupate arată astfel

c_{ij}	$u_i + v_j$
	x_{ij}

Acum verificăm condiţiile de optimalitate (8.4) pentru căsuţele libere. Dacă toate condiţiile (8.4) sunt îndeplinite, atunci soluţia iniţială este optimă. Dacă cel puţin o condiţie (8.4) nu este verificată, atunci se trece la procesul de ameliorare (îmbunătăţire) a soluţiei.

Definiţia 8.3.1 *Numim* **ciclu** *corespunzător unei căsuţe libere o succesiune de căsuţe ocupate, două câte două alăturate pe aceeaşi linie, sau respectiv pe aceeaşi coloană, cu treceri alternative pe linii şi coloane, succesiunea începând imediat după căsuţa liberă şi terminându-se în vecinătatea aceleiaşi căsuţe libere.*

Într-un ciclu marcăm alternativ cu + şi − căsuţele, începând cu căsuţa liberă. Semnele se trec în colţul din stânga jos al căsuţei.

Pentru îmbunătăţirea soluţiei se determină valoarea minimă θ a valorii x_{ij} din căsuţele marcate cu −. Apoi, valoarea minimă θ se adună la valorile x_{ij} din căsuţele marcate cu + şi se scade din valorile x_{ij} din căsuţele marcate cu −.

Ciclul se alege pentru căsuţa liberă corespunzătoare diferenţei $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ cea mai mare în valoare absolută dintre diferenţele $\Delta_{ij} < 0$. Prin acest proces se obţine o nouă soluţie a problemei de transport, mai bună decât cea de la care am plecat.

Exemplul 8.3.1. Să considerăm problema de transport din Exemplul 8.2.1 cu soluţia iniţială din Tabelul 8.2.1, obţinută prin metoda colţului Nord–Vest.

Considerăm variabilele marginale u_1, u_2, u_3 şi v_1, v_2, v_3, v_4. Sistemul (8.3) corespunzător căsuţelor ocupate din Tabelul 8.2.1 este:

$$\begin{array}{ll} u_1 + v_1 = 3, \quad u_1 + v_2 = 2, \quad u_2 + v_2 = 3, \quad u_2 + v_3 = 2 \\ u_3 + v_3 = 3, \quad u_3 + v_4 = 2. \end{array} \tag{8.5}$$

Alegând $u_1 = 0$, găsim $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $u_2 = 1$, $v_3 = 1$, $u_3 = 2$, $v_4 = 0$.

Acum verificăm condiţiile de optimalitate (8.4) pentru căsuţele libere. Avem:

$$\begin{array}{lll} u_1 + v_3 = 1 = c_{13} \geq 1; & u_1 + v_4 = 0 \leq c_{14} = 1; & u_2 + v_1 = 4 > 2, \\ u_2 + v_4 = c_{24} \leq 1; & u_3 + v_1 = 5 > 4, & \\ u_3 + v_2 = 4 > 2, & & \end{array}$$

de unde observăm că pentru căsuţele libere $(2,1)$, $(3,1)$ şi $(3,2)$ nu sunt verificate condiţiile de optimalitate. Prin urmare, soluţia iniţială din Tabelul 8.2.1 nu este optimă.

Calculele de mai sus se pot reprezenta ca în Tabelul 8.3.1.

	v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 1$	$v_4 = 0$	
u_i	$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
$u_1 = 0$	D_1	3 | 3 - | 45	2 | 2 + | 5	1 | 1 | 0	1 | 0 | 0	50
$u_2 = 1$	D_2	2 | 4 + | 0	3 | 3 - | 10	2 | 2 | 20	1 | 1 | 0	30
$u_3 = 2$	D_3	4 | 5 | 0	2 | 4 | 0	3 | 3 | 5	2 | 2 | 35	40
	Necesar	45	15	25	35	

Tabelul 8.3.1.

Sistemul (8.5) se poate rezolva direct pe Tabelul 8.3.1, plecând de la $u_1 + v_1 = 3$ şi $u_1 = 0$.

Acum stabilim căsuţa liberă pentru care considerăm ciclul. În acest scop calculăm diferenţele Δ_{ij} pentru căsuţele libere în care nu au fost îndeplinite condiţiile de optimalitate:

$$\Delta_{21} = -2, \quad \Delta_{31} = -1 \text{ şi } \Delta_{22} = -2.$$

Cum $\max(|-2|, |-1|, |-2|) = 2$ este atins pentru două căsuţe libere $(2,1)$ şi $(2,2)$, vom alege unul din ciclurile determinate de ele. De exemplu, să ne fixăm pe cel determinat de căsuţa $(2,1)$.

Acesta este dat de căsuţele $(2,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$ şi $(2,2)$. Marcăm alternativ căsuţele ciclului cu $+$ şi $-$, începând cu cea liberă. Numărul θ este dat de

$$\theta = \min\{45, 10\} = 10.$$

Adunăm θ la x_{ij} din căsuţele cu $+$ şi scădem acelaşi număr la cele marcate cu $-$. Obţinem noua soluţie dată de Tabelul 8.3.2.

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
D_1	3 / 35	2 / 15	1 / 0	1 / 0	50
D_2	2 / 10	3 / 0	2 / 20	1 / 0	30
D_3	4 / 0	2 / 0	3 / 5	2 / 35	40
Necesar	45	15	25	25	

Tabelul 8.3.2

Valoarea funcţiei cost total pentru noua soluţie (din Tabelul 8.3.2) este

$$f = 3 \cdot 35 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 35 = 280$$

8.4 Aflarea unei soluţii optime

În paragrafele precedente am văzut cum se află o soluţie iniţială şi cum poate ea fi ameliorată (îmbunătăţită). Acum putem prezenta un algoritm pentru aflarea soluţiei optime pentru o problemă de transport. Acesta poartă numele de **algoritmul distributiv** sau **algoritmul potenţialelor**.

Paşii algoritmului sunt:

Pasul 1. Se determină o soluţie iniţială a problemei de transport;

Pasul 2. Se găsesc valorile marginale u_i, $i = \overline{1,m}$ şi v_j, $j = \overline{1,n}$, ca soluţii ale sistemului de ecuaţii $u_i + v_j = c_{ij}$, unde i şi j sunt indicii căsuţelor ocupate;

Pasul 3. Se verifică condiţiile de optimalitate a soluţiei găsite, adică dacă au loc inegalităţile $u_i + v_j \le c_{ij}$ pentru toţi indicii (i,j) de căsuţe libere;

Pasul 4. Dacă soluţia nu este optimă, adică cel puţin o condiţie de optimalitate nu este îndeplinită, atunci se calculează diferenţele $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) < 0$ corespunzătoare căsuţelor libere pentru care condiţia de optimalitate nu este verificată. Cea mai mare diferenţă Δ_{ij} în valoare absolută determină căsuţa liberă (i, j) pentru care alegem ciclul folosit în ameliorarea soluţiei.
Pasul 5. Se marchează alternativ cu $+$ şi $-$ căsuţele ciclului, începând cu căsuţa liberă.
Pasul 6. Se determină valoarea minimă θ a valorilor x_{ij} din căsuţele ciclului marcate cu $-$.
Pasul 7. Valoarea minimă θ se adună la valorile x_{ij} din căsuţele marcate cu $+$ şi se scade din valorile x_{ij} din căsuţele marcate cu $-$. Se obţine astfel o nouă soluţie pentru problema de transport.
Pasul 8. Se reiau paşii 2–7 cu noua soluţie şi se continuă repetarea lor până când toate condiţiile de optimalitate sunt îndeplinite, adică s-a obţinut o soluţie optimă.
Pasul 9. Se scrie soluţia optimă şi se calculează valoarea minimă a funcţiei obiectiv (scop).
Exemplul 8.4.1. Să rezolvăm problema de transport din Exemplul 8.2.1.

Vom porni de la soluţia iniţială obţinută prin metoda elementului minim (vezi Tabelul 8.2.2). Vom parcurge calculele algoritmului direct pe tabel.

Avem

<table>
<tr><td></td><td>v_j</td><td colspan="2">$v_1 = 2$</td><td colspan="2">$v_2 = 0$</td><td colspan="2">$v_3 = 1$</td><td colspan="2">$v_4 = 1$</td><td></td></tr>
<tr><td>u_i</td><td>$D_i \setminus C_j$</td><td colspan="2">C_1</td><td colspan="2">C_2</td><td colspan="2">C_3</td><td colspan="2">C_4</td><td>Disponibil</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$u_1 = 0$</td><td rowspan="2">D_1</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td rowspan="2">50</td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td></td><td>0</td><td>+</td><td>15</td><td>-</td><td>35</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$u_2 = 0$</td><td rowspan="2">D_2</td><td>2</td><td></td><td>3</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td rowspan="2">30</td></tr>
<tr><td></td><td>30</td><td></td><td>0</td><td></td><td>0</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$u_3 = 2$</td><td rowspan="2">D_3</td><td>4</td><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td><td></td><td>2</td><td>3</td><td rowspan="2">40</td></tr>
<tr><td></td><td>15</td><td></td><td>15</td><td>-</td><td>10</td><td>+</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>Necesar</td><td colspan="2">45</td><td colspan="2">15</td><td colspan="2">25</td><td colspan="2">35</td><td></td></tr>
</table>

Tabelul 8.4.1.

şi întrucât $u_3 + v_4 = 3 > 2 = c_{34}$, deducem că soluţia nu este optimă. Avem o singură căsuţă liberă cu $\Delta_{ij} < 0$ şi anume căsuţa $(3, 4)$. Formăm ciclul determinat de ea prin căsuţele $(3, 4)$, $(3, 3)$, $(1, 3)$ şi $(1, 4)$. Marcăm alternativ cu $+$ şi $-$ căsuţele ciclului. Valoarea minimă θ este dată de $\theta = \min\{10, 35\} = 10$.

Se obţine astfel o nouă soluţie reprezentată în Tabelul 8.4.2

	v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 1$	
u_i	$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
$u_1 = 0$	D_1	3 3 / + 0	2 1 / 0	1 / 25	1 / - 25	50
$u_2 = -1$	D_2	2 / 30	3 0 / 0	2 0 / 0	1 0 / 0	30
$u_3 = 1$	D_3	4 / - 15	2 / 15	3 2 / 0	2 / + 10	40
	Necesar	45	15	25	35	

Tabelul 8.4.2.

Reluăm calculul valorilor marginale şi verificarea condiţiilor de optimalitate pentru noua soluţie. Lucrăm pe Tabelul 8.4.2.

Se observă că soluţia obţinută în tabelul 8.4.2. este optimă deoarece $u_i + v_j \leq c_{ij}$ pentru toate căsuţele libere.

Deci, o soluţie optimă a problemei de transport 8.2.1 este

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 & 25 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 15 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

iar $\min f = 1 \cdot 25 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 30 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 = 220$.

Observaţia 8.4.1 *Este posibil ca soluţia optimă a uni probleme de transport să nu fie unică, adică să aibă soluţii multiple. Vom avea soluţii multiple atunci când există mai multe căsuţe la care $u_i + v_j = c_{ij}$, adică condiţia de optimalitate este îndeplinită cu egalitate.*

Celelalte soluţii optime, când există, se obţin aplicând procedeul ameliorării soluţiilor pentru căsuţele la care $u_i + v_j = c_{ij}$. Soluţia generală se va scrie ca o combinaţie liniară convexă a soluţiilor optime găsite.

În cazul exemplului nostru, se observă că în tabelul 8.4.2 avem căsuţa $(1,1)$ pentru care $u_1 + v_1 = 3 = c_{11} = 3$. Formăm ciclul $(1,1)$, $(1,4)$, $(3,4)$ şi $(3,3)$. Marcăm cu $+$ şi $-$ căsuţele ciclului.

Valoarea minimă θ este dată de

$$\theta = \min\{15, 25\} = 15$$

Obţinem o nouă soluţie optimă dată prin

$$X_2 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 25 & 10 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Soluţia generală este

$$X = \alpha X_1 + \beta X_2 = \begin{pmatrix} 15\beta & 0 & 25\alpha + 25\beta & 25\alpha + 10\beta \\ 30\alpha + 30\beta & 0 & 0 & 0 \\ 15\alpha & 15\alpha + 15\beta & 0 & 10\alpha + 25\beta \end{pmatrix}$$

unde $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

8.5 Degenerarea în problemele de transport

Am văzut (§8.1) că soluţia unei probleme de transport este **degenerată** dacă are mai puţin de $m+n-1$ valori nenule (căsuţe ocupate). Degenerarea în problemele de transport apare în următoarele situaţii: a) când soluţia iniţială este degenerată, situaţie posibilă dacă valoarea disponibilului este egală cu valoarea necesarului, pentru o anumită linie şi coloană; b) la îmbunătăţirea unei soluţii, când valoarea minimă din căsuţele ciclului marcate cu $-$ este atinsă în cel puţin două cazuri.

În ambele situaţii se obţin mai puţine căsuţe ocupate, având mai puţine ecuaţii decât $m + n - 1$. Rezultă că variabilele duale (marginale) nu pot fi determinate.

Pentru înlăturarea acestui inconvenient se foloseşte **metoda zerourilor esenţiale**. Acesta constă în tranformarea unor căsuţe libere în căsuţe ocupate cu un 0^*, numit **zero esenţial**. Acest 0^* se pune în căsuţele libere cu costuri minime, care nu formează cicluri cu căsuţele deja ocupate. În final, trebuie ca numărul total al căsuţelor ocupate să fie $m + n - 1$.

În situaţia b) zerourile esenţiale se înscriu în căsuţe care se eliberează şi în care costurile sunt mai mici.

Exemplul 8.5.1. Trei întreprinderi I_1, I_2 şi I_3 produc patru tipuri de produse P_1, P_2, P_3 şi P_4 cu cheltuielile unitare de producţie diferite. Cheltuielile pentru producerea unei unităţi din fiecare tip de produs, de către fiecare întreprindere, sunt date în tabelul 8.5.1.

$I_i \setminus P_i$	P_1	P_2	P_3	P_4
I_1	4	3	2	3
I_2	2	4	5	2
I_3	2	4	4	5

Tabelul 8.5.1.

Cele trei întreprinderi au capacităţi egale de producţie, fiecare putând produce cel mult 40 de unităţi din cele patru produse luate la un loc. Cantităţile necesare din cele patru produse sunt egale cu 40, 30, 50 şi 40 unităţi.

i) Să se determine un plan de producţie comun pentru cele trei întreprinderi astfel încât să se asigurea într-o măsură cât mai mare cantităţile necesare din cele patru produse, cu cheltuieli totale de producţie minime.

ii) Să se interpreteze din punct de vedere economic soluţia optimă obţinută.

iii) Este unică soluţia optimă?

i) Se observă că avem o problemă de transport deoarece putem considera cele patru tipuri de produse ca patru centre consumatoare, iar cele trei întreprinderi ca trei centre de depozitare. Obţinem astfel problema de transport din Tabelul 8.5.2.

$I_i \setminus P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	Disponibil
I_1	4	3	2	3	40
I_2	2	4	5	2	40
I_3	2	4	4	5	40
Necesar	40	30	50	40	120 / 160

Tabelul 8.5.2

Deoarece modelul este neechilibrat, totalul de necesar este mai mare decât totalul de disponibil, vom introduce un centru fictiv de producţie I_4, care să "producă" diferenţa de 40 unităţi. Pentru acest centru fictiv costurile unitare sunt nule. Modelul problemei de rezolvat ia forma din Tabelul 8.5.3.

$I_i \setminus P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	Disponibil
I_1	4	3	2	3	40
I_2	2	4	5	2	40
I_3	2	4	4	5	40
I_4	0	0	0	0	40
Necesar	40	30	50	40	160

Tabelul 8.5.3.

Aplicăm metoda elementului minim şi găsim soluţia iniţială din Tabelul 8.5.4.

	v_j	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 0$	
u_i	$I_i \setminus P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	Disponibil
$u_1 = 0$	I_1	4 0 0	3 2 0	2 40	3 0 0	40; 0
$u_2 = 2$	I_2	2 0^*	4 2 0	5 4 0	2 40	40
$u_3 = 2$	I_3	2 + 0^*	4 - 30	4 10	5 2 0	40
$u_4 = 0$	I_4	0 - 40	0 2 + 0	0 2 0	0 0 0	40; 0
	Necesar	40	30	50	40	160

Tabelul 8.5.4.

Soluţia determinată este degenerată. Introducem 0^* (esenţial) la căsuţele $(2, 1)$ şi $(3, 1)$. Determinăm valorile duale (marginale) trecute pe marginea Tabelului 8.5.4. Formăm ciclul $(4, 2)$, $(4, 1)$, $(3, 1)$ şi $(3, 2)$ care se marchează cu $+$ şi $-$ ca în Tabelul 8.5.4.

Cu $\theta = \min\{30, 40\} = 30$, obţinem soluţia îmbunătăţită din Tabelul 8.5.5.

	v_j	$v_1 = 0$	$v_2 = 2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 0$	
u_i	$I_i \setminus P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	Disponibil
$u_1 = 0$	I_1	4 0 0	3 0 0	2 40	3 0 0	40
$u_2 = 2$	I_2	2 0^*	4 2 0	5 4 0	2 40	40
$u_3 = 2$	I_3	2 + 30	4 2 0	4 - 10	5 2 0	40
$u_4 = 0$	I_4	0 - 10	0 30	0 2 + 0	0 0 0	40
	Necesar	40	30	50	40	

Tabelul 8.5.5.

Pentru soluţia din Tabelul 8.5.5 determinăm valorile marginale. Considerăm ciclul $(4, 3)$, $(4, 1)$, $(3, 1)$ şi $(3, 3)$, marcat cu $+$ şi $-$ ca în Tabelul 8.5.5.

Cu $\theta = \min\{10, 10\} = 10$, găsim soluţia din Tabelul 8.5.6.

	v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 2$	
u_i	$I_i \setminus P_j$	P_1	P_2	P_3	P_4	Disponibil
$u_1 = 0$	I_1	4 0 / 0	3 2 / 0	2 / 40	3 0 / 0	40
$u_2 = 0$	I_2	2 / 0^*	4 2 / 0	5 2 / 0	2 / 40	40
$u_3 = 0$	I_3	2 / 40	4 2 / 0	4 2 / 0	5 2 / 0	40
$u_4 = -2$	I_4	0 0 / 0	0 / 30	0 / 10	0 0 / 0	40
	Necesar	40	30	50	40	

Tabelul 8.5.6.

Reluând procesul de ameliorare a unei soluţii pentru cea din Tabelul 8.5.6. se constată că sunt îndeplinite toate condiţiile de optimizare. Prin urmare, soluţia găsită

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este optimă, iar $\min f = 2 \cdot 40 + 2 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 240$.

ii) Soluţia optimă găsită ne arată că fiecare întreprindere trebuie să producă numai un tip de produs: întreprinderea I_1 să producă P_3, întreprinderea I_2 să producă P_4, iar întreprinderea I_3 să producă P_1. Cele trei întreprinderi îşi folosesc la maxim capacităţile de producţie. Cu toate acestea, necesarul de produs P_2 nu este satisfăcut complet (mai trebuie 30 de unităţi), precum şi 10 unităţi din produsul P_3. Cheltuielile minime de producţie totale sunt egale cu 240 unităţi monetare.

iii) În Tabelul 8.5.6 pentru căsuţele $(4, 1)$ şi $(4, 4)$ avem $u_1 + v_1 = 0 = c_{41}$ şi respectiv $u_4 + v_4 = 0 = c_{44}$. Deoarece nu avem cicluri plecând de la aceste căsuţe libere, rezultă că nu mai obţinem o nouă soluţie optimă. Rezultă că problema are o singură soluţie optimă, cea găsită mai sus.

8.6 Probleme de transport cu capacităţi limitate

Sunt situaţii în care într-o problemă de transport pe unele rute avem capacităţi limitate. Notăm cu d_{ij} capacitatea maximă ce poate fi transportată pe ruta ce leagă depozitul D_i de centrul de consum C_j.

Dacă păstrăm notaţiile din §8.1., atunci modelul matematic al acestei probleme, numită **problemă de transport** cu **capacităţi limitate**, este

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n} \\ 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \\ (\min) f = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \end{cases}$$

sau sub formă de tabel

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	$\dots$	C_n	Disponibil
D_1	c_{11} d_{11} x_{11}	c_{12} d_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} d_{1n} x_{1n}	a_1
D_2	c_{21} d_{21} x_{21}	c_{22} d_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} d_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
D_n	c_{m1} d_{m1} x_{m1}	c_{m2} d_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} d_{mn} x_{mn}	a_m
Necesar	b_1	b_2	$\dots$	b_n	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i$ $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

Tabelul 8.6.1.

Observaţia 8.6.1 *Din condiţiile de limitare a capacităţilor rezultă că este necesar ca pe fiecare linie, respectiv coloană, să fie verificate inegalităţile:*

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \geq a_i, i = \overline{1,m}$$

respectiv

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} \geq b_j, j = \overline{1,n}$$

Metoda de rezolvare a unei probleme de transport cu capacităţi limitate este aproape identică cu cea a unei probleme de transport fără limite de capacitate.

La determinarea unei soluţii iniţiale valoarea variabilei din căsuţa ce se ocupă se află acum ca minimul dintre disponibilul necesar şi capacitatea corespunzătoare varabilei respective. Când acest minim este egal cu capacitatea respectivă, valoarea se va sublinia, ceea ce înseamnă că pe linia, respectiv coloana căsuţei restul variabilelor nu se vor lua automat egale cu zero. Aceasta înseamnă că, în general, vor fi ocupate mai mult decât $m + n - 1$ căsuţe. Se vor considera un număr de $m + n - 1$ variabile nebarate.

Trecând la problema duală, se găsesc următoarele condiţii, de optimalitate pentru probleme de transport cu capacităţi limitate:

1) $u_i + v_j \le c_{ij}$, pentru căsuţele libere (i, j);

2) $u_i + v_j \ge c_{ij}$, pentru căsuţele (i, j) cu valori subliniate;

unde u_i, $i = \overline{1, m}$ şi v_j, $j = \overline{1, n}$ sunt variabilele duale u_i şi v_j, date de sistemul

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

unde (i, j) este indice de căsuţă ocupată (corespunzătoare la variabila de bază).

La determinarea unei soluţii iniţiale, din cauza capacităţilor limitate, sunt situaţii în care nu se pot repartiza în căsuţe tot disponibilul şi tot necesarul.

Pentru a nu ajunge la o astfel de situaţie, se recomandă următorul procedeu de ocupare a căsuţelor: a) pe linia (sau coloana) costului minim se ocupă căsuţele în ordine crescătoare a costurilor; b) se procedează analog pe coloana (linia) ultimei căsuţe ocupate din linia (coloana) de la a); c) se continuă în mod analog, alternativ, până la epuizarea disponibilului şi necesarului.

Exemplul 8.6.1. Să se rezolve problema de transport cu capacităţi limitate:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 250 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 210 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100 \\ x_{11} + x_{21} + x_{32} = 160 \\ x_{11} + x_{23} + x_{33} = 190 \\ x_{11} + x_{24} + x_{34} = 160 \\ x_{ij} \ge 0, i = 1, 2, 3 \text{ şi } j = 1, 2, 3, 4 \\ x_{12} \le 80, x_{23} \le 170, x_{31} \le 80, x_{32} \le 120 \\ (\min) f = 3x_{11} + 12x_{12} + 5x_{13} + 9x_{14} + 2x_{21} + 13x_{22} + \\ \quad +5x_{23} + 6x_{24} + x_{31} + 7x_{32} + 8x_{33} + 18x_{34}. \end{cases}$$

Vom determina o soluţie iniţială folosind metoda elementului minim. Obţinem astfel Tabelul 8.6.2.

	$v_1 = 2$	$v_2 = 13$	$v_3 = 5$	$v_4 = 6$	Disponibil
$u_1 = 0$	3	2 | 0	12	13 80	0	5
150	9	6 	0	150; 0
$u_2 = 0$	2
20	13
40	5
30	6
160	250; 220; 200; 40; 0
$u_3 = 3$	1	80 | $\underline{80}$	7 | 120	$\underline{120}$	8
10	18	9 	0	210; 120; 10
Necesar	100 20 0	160 40 0	190 180 30 0	160 0	610

Tabelul 8.6.2.

Se observă că pentru soluţia iniţială avem $3+4-1 = 6$ variabile de bază (corespunzătoare la căsuţe ocupate cu valori nesubliniate).

Aşadar, putem trece la verificarea optimalităţii. Calculăm valorile duale (marginale) şi observăm că soluţia nu este optimă deoarece pentru căsuţa liberă $(1, 2)$ avem $u_1 + v_2 = 13 > c_{12} = 12$. Ciclul corespunzător acestei căsuţe este $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$ şi $(2, 2)$.

Marcăm cu $+$ şi $-$. Valoarea minimă $\theta = \min\{40, 150\} = 40$ ne permite să scriem soluţia îmbunătăţită dată în Tabelul 8.6.3.

	$v_1 = 2$	$v_2 = 12$	$v_3 = 5$	$v_4 = 6$	Disponibil
$u_1 = 0$	3	2 | 0	12 | 80	40	5
110	9	6 	0	150
$u_2 = 0$	2
20	13	12 | 0	5 | 170	70	6
160	250
$u_3 = 3$	1	5 80	$\underline{80}$	7	15 120	$\underline{120}$	8
10	18	9 	0	210
Necesar	100	160	190	160	610

Tabelul 8.6.3.

Se observă că noua soluţie găsită este optimală deoarece pentru toate căsuţele libere avem $u_i + v_j \le c_{ij}$, iar pentru căsuţele ocupate cu valori subliniate avem $u_i + v_j \ge c_{ij}$. Avem

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 110 & 0 \\ 20 & 0 & 70 & 160 \\ \underline{80} & \underline{120} & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

cu

$$\min f = 12 \cdot 40 + 5 \cdot 110 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 70 + 6 \cdot 160 + 1 \cdot 180 + 7 \cdot 120 + 8 \cdot 10 = 3380$$

Observaţia 8.6.2 *În procesul de îmbunătăţire a unei soluţii putem avea situaţia în care* $u_i + v_j \leq c_{ij}$ *pentru toate căsuţele libere şi să existe o căsuţă ocupată* (r, s) *cu valoare subliniată pentru care* $u_r + v_s < c_{rs}$. *În acest caz se continuă procesul de îmbunătăţire formând un ciclu cu vârf negativ în căsuţa* (r, s) *(ocupată cu valoarea subliniată).*

8.7 Probleme

1. Se consideră depozitele D_1 şi D_2, care au cantităţile disponibile $a_1 = 50$ unităţi şi respectiv $a_2 = 35$ unităţi. Acestea sunt solicitate de trei centre de consum C_1, C_2 şi C_3 în cantităţile $b_1 = 15$ unităţi, $b_2 = 45$ unităţi şi respectiv $b_3 = 25$ unităţi. Cunoscând costurile unitare de transport $5, 3, 2$ respectiv $3, 2, 4$ unităţi monetare, de la primul, respectiv al doilea depozit, la primul, al doilea, respectiv al treilea centru de consum.

a) să se scrie modelul matematic al problemei de transport, când se urmăreşte minimizarea costului total;

b) să se stabilească câte o soluţie iniţială, utilizând fiecare din cele trei metode, pentru problema de transport dată;

c) să se afle soluţiile optimale, plecând de la fiecare din soluţiile iniţiale aflate la b).

2. Să se rezolve problema de transport dată prin modelul matematic:

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 15\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 25\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15
\end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$$

$$(\min) f = 8x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + x_{22} +$$
$$+ 6x_{23} + 7x_{24} + x_{31} + 9x_{32} + 4x_{33} + 3x_{34}.$$

3. Să se rezolve problema de transport:

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 5\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5\\
&x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}
\end{aligned}$$

$$(\min) f = 4x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + 2x_{32} + 6x_{33}.$$

4. În patru întreprinderi I_1, I_2, I_3, I_4 se produce acelaşi produs în cantităţi egale cu $14, 18, 25$ şi 16 unităţi. Acest produs trebuie transportat la şase centre de consum C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 şi C_6, care au nevoie respectiv de cantităţile $17, 20, 11, 14, 24$ şi 9 unităţi. Costurile de transport pe unitatea de produs între diferitele întreprinderi I_i, $i = \overline{1,4}$ şi diferitele centre de consum C_j, $j = \overline{1,6}$, sunt date în tabelul de mai jos.

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
D_1	5	4	4	4	5	2
D_2	6	4	3	4	2	3
D_3	2	4	5	4	4	5
D_4	3	2	6	4	3	4

a) să se determine un plan optim de transport, care să asigure o cantitate de produs cât mai mare transportată, cu un cost total de transport minim.

b) să se interpreteze economic soluţia optimă găsită.

c) să se precizeze dacă problema are soluţie unica, în caz contrar să se determine toate soluţiile optime.

5. Patru muncitori, notaţi cu A_1, A_2, A_3 şi A_4, trebuie să fie repartizaţi pe unele din cele cinci maşini ale unei întreprinderi, maşini notate cu M_1, M_2, M_3, M_4 şi M_5, astfel încât să nu lucreze mai mulţi muncitori pe aceeaşi maşină şi nici un muncitor pe mai multe maşini.

În tabelul alăturat se dă numărul de rezultate în medie prin lucrul fiecărui muncitor la fiecare maşină, la 1000 de piese lucrate.

$A_i \setminus M_j$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
A_1	3	2	1	3	2
A_2	4	2	2	3	2
A_3	3	1	3	4	1
A_4	3	3	3	3	1

Să se determine o repartiţie a celor patru muncitori, astfel încât procentajul mediu de rebuturi, pe întreaga întreprindere, să fie minim.

6. Să se rezolve problema de transport cu capacităţi limitate.

$$
\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=200\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=350\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=250\\
&x_{11}+x_{21}+x_{31}=150\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32}=210\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33}=230\\
&x_{14}+x_{24}+x_{34}=210\\
&x_{ij}\geq 0,\quad i=\overline{1,3}, j=\overline{1,4}\\
&x_{12}\leq 90, x_{23}\leq 190, x_{31}\leq 90, x_{32}\leq 130
\end{aligned}
$$

$$
(\min)f=5x_{11}+13x_{12}+7x_{13}+10x_{14}+4x_{21}+14x_{22}+7x_{23}+7x_{24}+3x_{31}+
$$
$$
+9x_{32}+9x_{33}+18x_{34}.
$$

7. Să se rezolve problema de transport dată prin tabelul

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
D_1	3	4	2	2	11
D_2	3	2	5	2	23
D_3	4	3	4	2	28
Necesar	8	13	28	13	

8. Să se rezolve problema cu capacităţi limitate dată prin tabelul

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
D_1	2	3 80	5	4	200
D_2	6	5	3 100	2	400
D_3	8	1 90	4	3	190
Necesar	210	160	310	110	

9. Să se afle soluţia generală pentru problema de transport dată prin tabelul

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	Disponibil
D_1	3	2	2	4	78
D_2	1	2	3	4	18
D_3	3	5	2	1	28
Necesar	56	31	21	16	

10. Să se afle soluţia generală pentru problema de transport dată prin tabelul

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Disponibil
D_1	4	5	3	12	11	10
D_2	7	6	13	11	6	20
D_3	6	9	10	7	14	16
D_4	11	12	14	6	8	5
Necesar	23	8	6	12	2	

11. Să se rezolve problema de transport dată prin tabelul

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	Disponibil
D_1	1 5	6 10	10 20	40
D_2	8 5	1 10	2 20	40
D_3	3 5	7 10	5 20	30
Necesar	20	30	60	

12. Să se rezolve problema de transport dată prin tabelul

$D_i \setminus C_j$	C_1	C_2	C_3	Disponibil
D_1	4	2	6	60
D_2	1	3	2	40
D_3	6	6	3	80
Necesar	50	50	50	

8.8 Testul Nr. 7 de verificare a cunoştinţelor

1. Precizaţi noţiunea de problemă de transport.
2. Precizaţi etapele generale ale rezolvării unei probleme de transport.
3. a) Precizaţi metoda colţiului Nord-Vest pentru determinarea unei soluţii iniţiale a unei probleme de transport;
   b) Precizaţi metoda elementului maxim pentru determinarea unei soluţii iniţiale a unei probleme de transport;
   c) Prezentaţi metoda diferenţelor maxime pentru determinarea unei soluţii iniţiale a unei probleme de transport.
4. a) În ce constă îmbunătăţirea unei soluţii a unei probleme de transport?
   b) precizaţi algoritmul distributiv (algoritmul potenţialelor) pentru determinarea soluţiei optime a unei probleme de transport.
5. Se consideră doi furnizori F_1 şi F_2, care au cantităţile disponibile $a_1 = 40$ unităţi şi respectiv $a_2 = 25$ unităţi. Acestea sunt solicitate de trei beneficiari B_1, B_2, B_3 în cantităţile $b_1 = 10$ unităţi, $b_2 = 35$ unităţi şi $b_3 = 20$ unităţi. Cunoscând costurile unitare de transport $c_{11} = 4$, $c_{12} = 2$, $c_{13} = 1$, respectiv $c_{21} = 2$, $c_{22} = 1$, $c_{23} = 3$ unităţi monetare, să se scrie modelul matematic şi să se determine o soluţie iniţială a problemei de transport considerate.
6. Considerând problema de transport prezentată în enunţul problemei precedente (inclusiv soluţia iniţială determinată) să se găsească valorile marginale şi să se verifice condiţiile de optimalitate.
7. Considerând probleme de transport prezentate în enunţul problemei 8, să se determine o soluţie iniţială folosind metoda colţului nord-vest, iar apoi să se utilizeze algoritmul distributiv pentru îmbunătăţirea acesteia şi rezolvarea completă a problemei respective.
8. Să se rezolve problema de transport:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 30 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 5 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5 \\ x_{ij} \geq 0\ , \quad i = \overline{1,3}\ , \quad j = \overline{1,3} \\ f = 4x_{11} + 3x_{12} + x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + x_{31} + 2x_{32} + 6x_{33} \to \text{minim} \end{cases}$$

9. Presupunând că la un moment dat în timpul rezolvării unei probleme de transport s-a ajuns la tabelul (situaţie):

4	4	2	2	1	4
	10		20		0
2	3	1	1	3	3
	0		2		20

Să se analizeze situaţia dată, apoi să se încerce formarea ciclului căsuţei (1, 3). Să se rezolve situaţia de degenerare apărută.

10. Să se rezolve problema de transport:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 17 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 14 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 7 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15 \\ x_{ij} \geq 0 \ , \quad i = \overline{1,3} \ , \quad j = \overline{1,4} \\ f = 4x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + x_{14} + 6x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 4x_{24} + 6x_{31} + 8x_{32} + x_{33} + 5x_{34} \to \text{minim} \end{cases}$$

Capitolul 9

Indicaţii şi răspunsuri

Testul 1

2. Se obţine tabelul

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	F
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

   Deci F este o tautologie.

3. Folosind metoda tabelelor de adevăr se obţine F realizabilă.

4. $\overline{(\forall x)F[x]} \Longleftrightarrow \overline{F(a_1) \wedge ... \wedge F(a_m)} \Longleftrightarrow \overline{F(a_1)} \vee ... \vee \overline{F(a_m)} \Longleftrightarrow (\exists x)\overline{F[x]}$.

5. Se rezolvă în mod similar cu problema precedentă.

6. Se presupune prin reducere la absurd că $(\exists)\ x \in A_k$, $(\forall)\ k \geq 1$. Folosind definiţia mulţimilor $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ şi relaţia $r_1 < r_2 < ... < r_n < ...$ de deduce $m_1 > m_2 > ... > m_k > ....$ Utilizând faptul că $\mathbb{N}$ are un cel mai mic element se obţine o contradicţie.

7. Se foloseşte definiţia noţiunilor de funcţie periodică şi de număr raţional.

8. Se verifică reflexivitatea, simetria şi tranzitivitatea relaţiei ρ. Dacă se fixează $z_1 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = r$ atunci $[z_1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 = r^2\}$, adică un cerc cu centrul în origine.

9. Se soluţionează în mod similar cu problema precedentă.

10. Se verifică reflexivitatea, antisimetria şi tranzitivitatea relaţiei definită în enunţ. Apoi se arată că orice două numere naturale pot fi comparate prin relaţia de ordine respectivă.

Testul 2

2. Se verifică condiţiile prezentate în definiţia noţiunii de spaţiu vectorial.

3. Se verifică condiţiile de liniar independenţă şi sistem de generatori ale sistemului de vectori B. Folosind relaţiile găsite la verificarea condiţiei de sistem de generatori ale sistemului de vectori B se găseşte $t_B = (-4, 4, 7)$.

4. Se obţine tabelul

$v_{(x_i)}$	1	2	2	1
$y_{3(x_i)}$	2	2	2	2
$v_{(y_i)}$	-1	0	1	-1

   Deci $v_{(y_i)} = (-1, 0, 1, -1)$.

5. Se foloseşte matricea de trecere şi se obţine $v_{(y_i)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 2\right)$.

6. Se verifică condiţiile impuse asupra aplicaţiei d în definiţiea noţiunii de metrică.

7. Se verifică condiţiile din definiţia noţiunii de produs scalar.

8. Se foloseşte definiţia normei induse de produsul scalar şi proprietăţile produsului scalar ($\|x\| = \sqrt{< x, x >}$).

9. Se foloseşte definiţia normei induse de produsul scalar ($\|x\| = \sqrt{< x, x >}$) şi se verifică condiţiile din definiţia noţiunii de normă. Remarcăm că folosim şi inegalitatea Cauchy-Baniakowski-Schwarz: $< x, y > \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}$.

10. Se arată că oricare ar fi x, y din $[a, b]$ segmentul cu extremitatea iniţială în x şi cea finală în y aparţine tot lui $[a, b]$.

Testul 3

2. rang$A = 3$
3. $\Delta = 0$
4. Dacă $m = -2$ atunci sistemul este incompatibil.

   Dacă $m = 2$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat cu soluţia $x = 2 - 2a$, $y = a \in \mathbb{R}$.

   Dacă $m \neq \pm 2$ atunci sistemul este compatibil determinat cu soluţia $x = -\dfrac{m+4}{m+2}$, $y = \dfrac{m^2+2m-1}{m+2}$.
5. Se obţine soluţia $x_1 = 4$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$.
6. Se obţine soluţia $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.
7. Se obţine soluţia $x_1 = 4$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$.
8. $\Delta = 2x^2 - 9x + 6$.
9. $\Delta = 9$.
10. $\Delta = 9$.

Testul 4

2. Se verifică condiţia $f(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$ $(\forall)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)$ $x, y \in \mathbb{R}^3$.
3. Se soluţionează analog cu problema precedentă.
4. Se obţin valorile caracteristici $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ şi vectorii caracteristice $v_1' = (a, 2a, a)$, $a \in \mathbb{R}$ cu reprezentatul $v_1 = (1, 2, 1)$; $v_2' = (a, a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$ cu reprezentantul $v_2 = (1, 1, 0)$; $v_3' = (a, 2a, 3a)$, $a \in \mathbb{R}$ cu reprezentantul $v_3 = (1, 2, 2)$.
5. Se obţin valorile caracteristice $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ şi vectorii caracteristici $v_1 = (3, 5, 6)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ şi $v_3 = (-1, 0, 1)$. Apoi se arată că v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi. Deoarece din $\mathbb{R}^3 = 3$ se obţine $\{v_1, v_2, v_3\}$ baza căutată iar matricea ataşată este $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Se determină valorile caracteristice $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, vectorii caracteristici $v_1 = (2, -5, -6)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ care se arată că sunt liniar indepedenţi. Deci $\{v_1, v_2, v_3\}$ bază în $\mathbb{R}^3$ şi matricea transformării are forma diagonală $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Forma canonică este $f(y) = y_1^2 - 3y_2^2 + 3y_3^2$.

8. Folosim transformarea: $y_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$, $y_3 = x_3$ şi obţinem $f(y) = y_1^2 - y_2^2 + 8y_1y_3 - 2y_2y_3$. Apoi aplicând metoda lui Gauss obţinem forma canonică:
$$f(z) = z_1^2 - z_2^2 - 15z_3^2.$$

9. Avem $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 3$, $\Delta_4 = -20$, deci forma canonică:
$$f(y) = y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2 - \frac{3}{20}y_4^2.$$

10. Analog cu soluţia problemei precedente se obţine forma canonică:
$$f(y) = y_1^2 - y_2^2 + \frac{1}{3}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2.$$

Testul 5

2. Se palică algoritmul Simplex şi se obţine optimul finit ${}^t x = (0, 4, 0, 2, 7)$ şi $\min(f) = 7$.

3. Se aplică algoritmul simplex şi se obţine soluţia optimă finită ${}^t x = \left(\dfrac{86}{12}, \dfrac{29}{13}, \dfrac{82}{13}, 0, 0, 0\right)$ şi $\min\, g = -\dfrac{759}{13}$ (de unde $g = -f$) şi astfel $\max\, f = \dfrac{759}{18}$.

4. Se observă că există cinci soluţii de tăiere pentru o bară: 1) se taie o bucată de 8 m şi alta de 5,25 m obţinându-se deşeu $0,75 = \dfrac{3}{4}$ m; 2) se taie o bucată de 8 m şi două bucăţi de 2,5 m obţinându-se deşeu 1 m; 3) se taie două bucăţi de 5,25 m şi una de 2,5 m obţinându-se deşeu 1 m; 4)

se taie o bucată de 5,25 şi trei de 2,5 m obţinându-se deşeu $1,25 = \frac{5}{4}$ m;

5) se taie cinci bucăţi de 2,5 m obţinându-se deşeu de $1,5 = \frac{6}{4}$ m.

Notând cu x_i, $i = \overline{1,5}$ numărul de bare planificate a se tăia în modul "i" obţinem problema de programare liniară

$$\begin{aligned}(\min)f = \ & \frac{1}{4}(3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5)\\ & x_1 + x_2 = 500\\ & x_1 + 2x_3 + x_4 = 800\\ & 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 450\\ & x_i \geq 0\ , \quad i = \overline{1,5}.\end{aligned}$$

Pentru a uşura calculele se va folosi funcţia obiectiv $f_1 = 3x_1+4x_2+4x_3+5x_4+6x_5$. Se aplică algoritmul Simplex şi se obţin soluţiile optime ${}^tx_1 = (500, 0, 150, 0, 60)$, ${}^tx_2 = (500, 0, 90, 120, 0)$, ${}^tx_3 = (380, 120, 210, 0, 0)$, deci în final $\min(f_1) = 2460(m) \Rightarrow \min(f) = 615(m)$ cu ${}^t(x) = \alpha \cdot^t x_1 + \beta \cdot^t x_2 + \gamma \cdot^t x_3$ cu $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

5. Se aplică algoritmul Simplex pentru funcţia obiectiv $g = -f$ şi se obţine optim infinit: $x_2 = M > 0$ (foarte mare), $x_1 = \frac{19}{10}$, $x_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot M$, $x_4 = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} \cdot M$, $\min(g) = -\frac{128}{15} - \frac{4}{3}M$, de unde $\max(f) = \frac{128}{15} + \frac{4}{3}M$.

6. Se plică algoritmul Simplex şi se obţin soluţii multiple şi anume:

$${}^tx_1 = \left(2, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0\right)\ ,\quad {}^tx_2 = \left(0, \frac{5}{6}, \frac{13}{6}, 0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow^t x = \alpha \cdot^t x_1 + \beta \cdot^t x_2$$

cu $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha + \beta = 1$ şi $\min(g) = -23$, deci $\max(f) = 23$.

7 Se introduc variabilele ecart x_5 şi x_6 obţinem forma canonică

$$\begin{aligned}&(\min)f(x) = 4x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4\\ &x_1 + x_2 + x_4 = 2\\ &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 5\\ &x_2 + x_3 - x_6 = 3\\ &x_i \geq 0\ , \quad i = \overline{1,6}.\end{aligned}$$

Se aplică algoritmul Simplex şi se obţine optimul finit ${}^tx = (0, 0, 5, 2, 0, 0)$, adică $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 2$ şi $\min(f) = -8$.

8. Se obţine forma canonică:

$$\begin{cases}(\min)g(x) = -3x_1 + 3x_2 - 4x_3\\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 8\\ x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 1\\ x_i \geq 0\ , \quad i = \overline{1,5}.\end{cases}$$

9. Avem duala:

$$
\begin{aligned}
&(\min) g(y) = 4y_1 + 3y_2 + 5y_3 \\
&y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq -1 \\
&y_1 + y_2 - y_3 \geq 1 \\
&y_i \geq 0\ , \quad i = \overline{1,3}.
\end{aligned}
$$

Forma canonică a acestei probleme de programare liniară este:

$$
\begin{cases}
(\min) g(y) = 4y_1 + 3y_2 + 5y_3 \\
y_1 - 2y_2 + 3y_3 - y_4 = -1 \\
y_1 + y_2 - y_3 - y_5 = 1 \\
y_i \geq 0\ , \quad i = \overline{1,5}.
\end{cases}
$$

Se aplică algoritmul Simplex şi se obţine soluţia optimă finită ${}^t y = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$ şi $\min(g) = \frac{10}{3} \Rightarrow \max f = \frac{10}{3}$. Se poate obţine şi soluţia problemei iniţiale: ${}^t x = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

10. Duala problemei considerate este:

$$
(\min) f(x) = 4x_1 + 2x_2 + x_3
\begin{cases}
2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8 \\
x_i \geq 0\ , \quad i = \overline{1,3}.
\end{cases}
$$

Se aplică algoritmul simplex şi se obţine soluţia optimă finită ${}^t x = (0, 5, 1)$ şi $\min(f) = 11 \Rightarrow \max(g) = 11$.

Testul 6

3. Drumul minim este $[x_1, x_2, x_4, x_5]$ şi are lungimea 6.

4. Se obţin matricile:

L	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	x_1x_2	0	x_1x_4	x_1x_5
x_2	0	0	x_2x_3	0	x_2x_5
x_3	x_3x_1	0	0	0	0
x_4	0	0	x_4x_3	0	x_4x_5
x_5	0	0	0	0	0

L^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	x_1	0	x_1	x_1
x_2	0	0	x_2	0	x_2
x_3	x_3	0	0	0	0
x_4	0	0	x_4	0	x_4
x_5	0	0	0	0	0

$L^2 = L^* \cdot L$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	$x_1x_2x_3$ $x_1x_4x_3$	0	$x_1x_2x_5$ $x_1x_4x_5$
x_2	$x_2x_3x_1$	0	0	0	0
x_3	0	$x_3x_1x_2$	0	$x_3x_1x_4$	$x_3x_1x_5$
x_4	$x_4x_3x_1$	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0

$L^3 = L^* \cdot L^2$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	$x_2x_3x_1x_4$	$x_2x_3x_1x_5$
x_3	0	0	0	0	$x_3x_1x_2x_5$ $x_3x_1x_4x_5$
x_4	0	$x_4x_3x_1x_2$	0	0	$x_4x_3x_1x_5$
x_5	0	0	0	0	0

5. Drumul de lungime maximă este $[x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_7, x_8, x_{11}, x_{13}, x_{14}]$ şi $l_{\max} = 48$.
6. Se obţine $l_{\min}(x_1 \to x_7) = 17$ şi drumul minim $[x_1, x_3, x_6, x_7]$.
7. Se obţine $l_{\max}(x_1 \to x_7) = 28$ şi $d_{\max}(x_1 \to x_7) = [x_1, x_4, x_3, x_5, x_6, x_7]$.

8. Se obţine tabelul final:

i	j	l_{ij}	t_i	t_j	s_j	m_{ij}	M_{ij}
1	2	2	0	2	2	0	0
2	3	9	2	16	16	5	5
2	4	5	2	7	7	0	0
2	6	3	2	5	12	0	7
3	7	4	16	20	20	0	0
4	5	7	7	14	14	0	0
5	3	2	14	16	16	0	0
5	8	5	14	30	30	11	11
6	7	8	5	20	20	7	7
7	8	10	20	30	30	0	0
7	9	9	20	29	35	0	5
7	10	9	20	29	34	0	5
8	11	8	30	38	38	0	0
9	13	10	29	45	45	6	6
10	12	5	29	38	39	4	5
11	13	7	38	45	45	0	0
12	13	6	38	45	45	1	1
13	14	3	45	48	48	0	0

9. Se vor marca în ordine x_3, x_4, x_5, x_2, x_1 şi astfel se deduce că avem un graf fără circuite.

10. matricea booleană asociată este:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Testul 7

5. Notând cu x_{ij} cantitatea ce se va transporta de la furnizorul F_i $(i = \overline{1,2})$

la beneficiarul B_j $(j = \overline{1,3})$ se obţine modelul matematic:

$$\begin{cases} x_{12} + x_{12} + x_{13} = 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 25 \\ x_{11} + x_{21} = 10 \\ x_{12} + x_{22} = 35 \\ x_{13} + x_{23} = 20 \\ x_{ij} \geq 0 \ , \quad i = \overline{1,2} \ , \quad j = \overline{1,3} \\ f = 4x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 3x_{23} \to \min \end{cases}$$

Apoi folosind metoda diferenţelor maxime obţinem soluţia iniţială: $x_{11} = 0$, $x_{12} = 20$, $x_{13} = 20$, $x_{21} = 10$, $x_{22} = 15$, $x_{23} = 0$ şi $f = 95$.

6. Se obţine:

	$v_1 = 3$		$v_2 = 2$		$v_3 = 1$	
$u_1 = 0$	4	3	2	2	1	1
		0		20		20
$u_2 = -1$	2	2	1	1	3	0
		10		15		0

deci toate condiţiile de optimizare sunt verificate şi astfel soluţia $X = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 \\ 10 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ cu $f = 95$ este optimă.

7. Se obţine soluţia iniţială:

4		2		1	
	10		30		0
2		1		3	
	0		5		20

Folosind valorile marginale se deduce că soluţia nu este optimă. Aplicând mai departe algoritmul distributiv se obţine soluţia optimă $X = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 \\ 10 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ cu $f_{\min} = 95$.

8. Folosind metoda diferenţelor maxime se obţine soluţia iniţială $X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 20 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La aplicarea algoritmului distributiv se ajunge la degenerare şi se va introduce un zero esenţial. În final se deduce că soluţia iniţială va fi optimă şi se calculează $l_{\min} = 90$.

9. Se rezolvă situaţia de degenerare prin introducerea unui zero esenţial în căsuţa (1, 2).

10. Folosind metoda diferenţelor maxime se obţine soluţia iniţială $X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 15 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ cu $f = 141$. Aceasta va fi optimă, dar în căsuţa liberă (1, 2) avem condiţia de optimalitate verificată cu egalitate. Formând ciclul căsuţei respective şi verificând şi condiţia de optimalitate se deduce o nouă soluţie optimă: $X^1 = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 13 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ cu $f_{\min} = 141$. Deci avem soluţia generală $X = \alpha \cdot X^0 + \beta \cdot X^1$ cu $\alpha, \beta \in [0, 1]$ şi $\alpha + \beta = 1$.

Bibliografie

[1] Bellman, R., *Introducere în analiza matricială*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[2] Berge, C., *Teoria grafurilor şi aplicaţiile ei*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[3] Blaga, P., Mureşan, A., *Matematici aplicate în economie*, vol.I, II, Transilvania Press, Cluj–Napoca, 1996.

[4] Boldur, Gh., *Fundamentarea complexă a procesului decizional economic , Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1973.*

[5] Boldur–Lăţescu, Gh., *Logica decizională şi conducerea sistemelor*, Editura Academiei, 1992.

[6] Cruceanu, V., *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.

[7] Freudenthal, H., *Limbajul logicii matematice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1973.

[8] Ionescu, T., *Grafuri. Aplicaţii*, vol.I, vol.II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973, 1974.

[9] Izvercian, P.N.,Creţu, V., Izvercian, M., Resiga, R., *Introducere în teoria grafurilor. Metoda drumului critic*, Editura de Vest, Timişoara, 1994.

[10] Mihu, C., *Metode numerice în algebra liniară*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977.

[11] Mitrinović, P.S., *Matrice i determinante (S bornik 2 odataka i problema)*, Navina Kniga, Beograd, 1972.

[12] Moisil, Gr.C., *Elemente de logică matematică şi de teoria mulţimilor*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

[13] Năstăsescu, C., *Introducere în teoria mulţimilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.

[14] Popa, C.E., Halmaghi, O., *Algebră liniară*, Universitatea "Lucian Blaga" din Sibiu, Colecţia Facultăţii de Ştiinţe, Seria Matematică, 2000.

[15] Popescu, O., Raischi, C., Matematici aplicate în economie, vol.I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[16] Pop, M.S., *Curs de Algebră liniară, Geometrie analitică, diferenţială şi Ecuaţii diferenţiale*, Partea I. Algebră liniară, Universitatea din Baia Mare, 1993.

[17] Proskuryakov, I.V., *Problems in Linear Algebra*, Mir Publishers, Moscow, 1978.

[18] Raţiu–Raicu, C., *Modelare şi simularea proceselor economice*, Editura Didactică şi Pedagogică, R.A., Bucureşti, 1995.

[19] Rosenstiehl, P., Mothes, I., *Matématiques de l'action*, Dumond, Paris, 1968.

[20] Roşu, A., *Teoria grafurilor, algoritmi, aplicaţii*, Editura Militară, Bucureşti, 1974.

[21] Roy, B., *Algébre moderne et théorie des graphes*, Tome 1, Dunod, Paris, 1969.

[22] Schatteles, T., *Metode economice moderne*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1977.

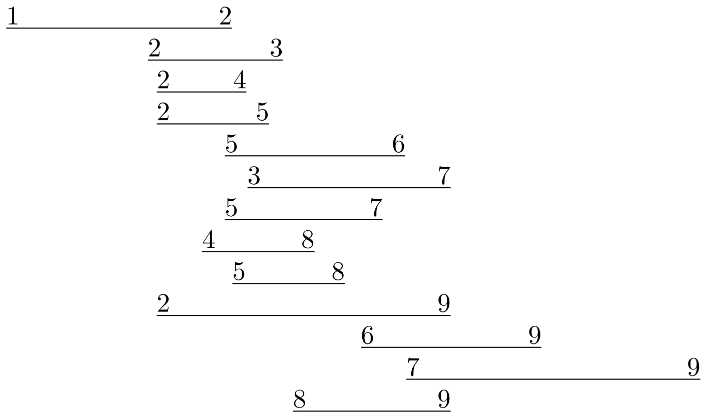
[23] Stavre, P., *Matematici speciale cu aplicaţii în economie*, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1982.

[24] Tamaş, V. (coord.), Brănzei, D., Smadici, C., Moicovici, T., *Modele matematice în economie*, Editura Graphix, Iaşi, 1995.

[25] Tomescu, I., *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[26] Vasiu, D.P., *Matematici economice*, Editura Eficient, Bucureşti, 1996.

[27] Văduva, I., Dinescu, C., Săvulescu, B., *Metode matematice de organizare şi conducerea producţiei*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.


1 2
2 3
2 4
2 5
5 6
3 7
5 7
4 8
5 8
2 9
6 9
7 9
8 9