Cuprins

Cuvânt înainte

Scopul celui de al doilea volum din trilogia Matematici Aplicate în Economie este de a prezenta, într-un ansamblu bine închegat, elementele de Analiză Matematică necesare unui viitor specialist în studiul fenomenelor economice.

Conceptele Analizei Matematice, în general, sunt utile atât în realizarea unor modele teoretice pentru fenomenele studiate, cât şi pentru studiul profund al unor precese de calcul. Analiza Matematică, prin conceptele sale puternice de limită, continuitate, derivabilitate şi integrabilitate, are o contribuţie deosebită în studiul sistematic al variaţiei unor structuri.

În această lucrare am selectat câteva capitole de Analiză Matematică, care conţin rezultatele fundamentale, însoţite de aplicaţii, în special din domeniul economic, pe care le-am considerat semnificative.

Ca şi în primul volum, din punct de vedere didactic, am încercat să realizăm joncţiunea cu cunoştinţele de analiză matematică acumulate în liceu. Cititorii, parcurgându-le, îşi pot, cu un efort minim, reînprospăta cunoştinţele.

Majoritatea rezultatelor sunt însoţite de exemple, care contribuie la înţelegerea şi aprofundarea cunoştinţelor.

Cartea se adresează studenţilor de la specializările economice şi tehnice, cât şi specialiştilor care utilizează concepte de Analiză Matematică.

Un cuvânt de mulţumire pentru cei doi referenţi ştiinţifici şi pentru toţi cei care au contribuit la apariţia acestei cărţi.

Sibiu, decembrie 2002

Autorii

Capitolul 1

Şiruri

" Nu ne informăm pur şi simplu, ci ne convingem,
după cum nu ne instruim ci învăţăm "

(Mircea Maliţa)

În acest capitol vor fi reluate cunoştinţele esenţiale despre şiruri de numere reale presupuse cunoscute din liceu, care, apoi, vor fi completate cu câteva noţiuni şi rezultate noi şi cu studiul şirurilor pe spaţii metrice, cu particularizări în spaţiile $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

1.1 Şiruri de numere reale

Acest paragraf este consacrat recapitulării noţiunilor principale despre şiruri de numere reale şi completării lor cu câteva noţiuni şi rezultate necesare în expunerile ulterioare.

Definiţia 1.1.1 *Se numeşte* ***şir de numere reale sau şir numeric*** *o funcţie $f : \mathbb{N}_p \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{N}_p = \{p, p+1, p+2, \dots\}$, p fiind un număr natural.*

Scriind $f(n) = a_n$, şirul se notează prin $(a_n)_{n \geq p}$ sau $\{a_n\}_{n \geq p}$. În mod uzual se ia $p = 1$ sau, uneori, $p = 0$. Pentru comoditate, fără a restrânge generalitatea, vom considera şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, scriind simplu (a_n); a_n se va numi termenul general al şirului.

Un şir poate fi dat prin termenul general, enumerând termenii şirului sau printr-o formulă de recurenţă.

Definiţia 1.1.2 *Un şir de numere reale (a_n) este **mărginit superior (majorat)** dacă mulţimea termenilor săi este majorată.*

Altfel spus, şirul numeric (a_n) este majorat dacă există numărul real β aşa încât $a_n \leq \beta$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Definiţia 1.1.3 *Un şir de numere reale (a_n) este **mărginit inferior (minorat)** dacă mulţimea termenilor săi este minorată.*

Cu alte cuvinte, şirul numeric (a_n) este minorat dacă există numărul real aşa încât $\alpha \leq a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Definiţia 1.1.4 *Spunem că şirul numeric (a_n) este **mărginit** dacă simultan este majorat şi minorat, adică dacă există numerele reale α şi β aşa încât $\alpha \leq a_n \leq \beta$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.*

Deoarece orice interval $[\alpha, \beta]$ este inclus într-un interval simetric faţă de 0 de forma $[-M, M]$, cu $M > 0$, putem afirma că şirul (a_n) este mărginit dacă şi numai dacă există un număr real $M > 0$ aşa încât să avem

$$|a_n| \leq M, \ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Definiţia 1.1.5 *Şirul numerelor (a_n) este **nemărginit** dacă nu este mărginit, adică dacă în afara oricărui interval mărginit există cel puţin un termen al şirului.*

Exemple:

1.1.1 Şirul $a_n = 2 + (-1)^n$ este mărginit deoarece $|a_n| \leq 3$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

1.1.2 Şirul $a_n = 3^n$ nu este mărginit superior dar este mărginit inferior ($a_n \geq 1$, $(\forall)n \in N$).

1.1.3 Şirul $a_n = -3^n$ nu este minorat, dar este majorat ($a_n < 0$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$).

1.1.4 Şirul $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$ nu este nici minorat şi nici majorat.

Definiţia 1.1.6 *Şirul (a_n) este* **crescător (strict crescător)** *dacă $a_n \leq a_{n+1}$, (respectiv $a_n < a_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.*

Definiţia 1.1.7 *Şirul (a_n) este* **descrescător (strict descrescător)** *dacă $a_{n+1} \leq a_n$ (respectiv $a_{n+1} < a_n$) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.*

Un şir crescător sau descrescător se numeşte şir monoton, iar un şir strict crescător sau strict descrescător se numeşte şir strict monoton.

Exemple:

1.1.5 Şirul $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$ este strict crescător.

1.1.6 Şirul $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$ este strict descrescător.

1.1.7 Şirul $a_n = 2 + (-1)^n$ nu este monoton.

Definiţia 1.1.8 *Fie (a_n) un şir de numere reale, iar (n_k) un şir strict crescător de numere naturale. Şirul $y_k = a_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, se numeşte* ***subşir*** *al şirului (a_n).*

Definiţia 1.1.9 *Şirul numeric (a_n) are limita $l \in \mathbb{R}$ dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$, există un număr natural n_ε astfel încât să avem $|a_n - l| < \varepsilon$, pentru orice n natural, $n > n_\varepsilon$.*

Dacă şirul (a_n) are limita l se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ sau $a_n \to l$ pentru $n \to \infty$ şi se mai spune că (a_n) este ***convergent*** la l.

Geometric, faptul că (a_n) converge la l înseamnă că în afara intervalului $V(l,\varepsilon) = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ (numit vecinătate de centru l şi rază ε) se află un număr finit de termeni, $a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon}$, iar interiorul lui $V(l,\varepsilon)$ se află o infinitate de termeni ai şirului (fig.1.1.1).

Fig.1.1.1.

Rezultă că orice şir numeric convergent este mărginit.

Definiţia 1.1.10 *Şirul numeric* (a_n) **are limita** $+\infty$ *dacă pentru orice număr real pozitiv* E*, există* $n_E \in \mathbb{N}$ *aşa încât* $a_n > E$*, pentru orrice* n *natural,* $n > n_E$*.*

Dacă şirul (a_n) are limita $+\infty$ înseamnă că în afara intervalului $V(\infty) = (E, \infty)$ (numit ***vecinătate*** a lui $+\infty$) se află un număr finit de termeni $a_1, a_2, \ldots, a_{n_E}$ (fig.1.1.2).

Fig.1.1.2.

Definiţia 1.1.11 *Şirul numeric* (a_n) **are limita** $-\infty$ *dacă pentru orice număr real negativ* E*, există* $n_E \in \mathbb{N}$ *aşa încât* $a_n < E$*, pentru orice* n *natural,* $n > n_E$*.*

Dacă şirul a_n are limită $-\infty$ se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ sau $a_n \to -\infty$ pentru $n \to \infty$.

Geometric, faptul că şirul (a_n) are limita $-\infty$ înseamnă că în afara intervalului $V(-\infty) = (-\infty, E)$ (numit ***vecinătate*** a lui $-\infty$) se află un număr finit de termeni ai şirului: $a_1, a_2, \ldots, a_{n_E}$ (fig.1.1.3).

Fig.1.1.3.

Dacă un şir de numere reale are limita $+\infty$ sau $-\infty$ se mai zice că are ***limită infinită***. Un şir de numere reale care are limită infinită sau nu are limită se spune că este ***divergent***.

Propoziţia 1.1.1 *Dacă un şir de numere reale are limită, finită sau infinită, atunci ea este unică.*

Veridicitatea acestei propoziţii rezultă prin reducere la absurd şi folosind definiţia limitei unui şir.

Teorema 1.1.1 *Dacă (a_n) şi (b_n) sunt şiruri de numere reale astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, l_1 şi l_2 finite sau infinite, iar $a_n \le b_n$ pentru n natural, $n \ge n_0$, atunci $l_1 \le l_2$.*

Demonstraţie. Vom demonstra numai în cazul l_1 şi l_2 finite. În celelalte situaţii demonstraţia este analoagă.

Presupunem că $l_1 > l_2$. Putem alege $\varepsilon > 0$ aşa încât $l_1 - \varepsilon > l_2 + \varepsilon > l_2$. Atunci există $n_{1\varepsilon} \in \mathbb{N}$ aşa încât dacă $n > n_{1\varepsilon}$ să avem $|a_n - l_1| < \varepsilon$ adică $\varepsilon < a_n - l_1 < \varepsilon$, de unde $a_n > l_1 - \varepsilon > l_2 + \varepsilon$. Din $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$ rezultă că există $n_{2\varepsilon}$ să avem $|b_n - l_2| < \varepsilon$, de unde $b_n < l_2 + \varepsilon$. Acum, deducem că pentru $n > \max\{n_0, n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon}\}$ are loc inegalitatea $a_n > b_n$, ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar, $l_1 \leq l_2$.

Utilizând această teoremă, se deduce valabilitatea următoarelor criterii de comparaţie, utile în aflarea limitelor de şiruri.

Propoziţia 1.1.2 (Criteriul majorării pentru limită finită). *Dacă pentru şirul de numere reale (a_n) există un număr real l şi un şir numeric (b_n), cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, astfel încât $|a_n - l| \leq b_n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.*

Observaţia 1.1.1 *În practică, cea mai întâlnită situaţie este $a_n = x_n y_n$, cu (x_n) şir mărginit şi (y_n) un şir convergent la zero.*

Exemplul 1.1.8. Şirul $a_n = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ are limita 0 deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ şi $\left|\sin \dfrac{1}{n}\right| \leq 1$.

Propoziţia 1.1.3 (Criteriul minorării pentru limita $+\infty$). *Dacă pentru şirul de numere reale (a_n) există şirul numeric (b_n), cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, şi numărul natural n_0 aşa încât $a_n \geq b_n$, pentru orice $n \geq n_0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.*

Exemplul 1.1.9. Şirul $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, are limita $+\infty$ deoarece $a_n \geq \sqrt[n]{n^n} = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Propoziţia 1.1.4 (Criteriul majorării pentru limita $-\infty$). *Dacă pentru şirul numeric (a_n) există şirul de numere reale (b_n), cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, şi numărul natural n_0, aşa încât $a_n \leq b_n$, pentru orice $n \geq n_0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*

Propoziţia 1.1.5 (Criteriul încadrării unui şir între două şiruri care au aceeaşi limită sau criteriul cleştelui).

Dacă pentru şirul numeric (a_n) *există şirurile* (b_n) *şi* (c_n) *de numere reale aşa încât* $b_n \leq a_n \leq c_n$ *pentru* $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *cu* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$, *atunci şirul* (a_n) *are limită şi* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

Exemplul 1.1.10. Pentru şirul

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{8n^3+n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^3+2n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^3+n^2+n}},$$

$n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+n^3+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+n+1}}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3+n+1}} = \frac{1}{2},$$

deducem că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

Propoziţia 1.1.6 *Fie* (a_n) *şi* (b_n) *şiruri de numere reale cu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, l_1 *şi* l_2 *finite sau infinite. Dacă* $l_1 + l_2$ *are sens, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_1 + l_2$.

Demonstraţie. Să considerăm cazul l_1 şi l_2 finite. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există numerele naturale $n_{1\varepsilon}$ şi $n_{2\varepsilon}$ aşa încât

$$|a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } n \text{ natural } n > n_{1\varepsilon}$$

şi

$$|b_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } n \text{ natural } n > n_{2\varepsilon}$$

Fie $n_\varepsilon = \max\{n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon}\}$. Atunci, pentru orice n natural $n > n_\varepsilon$, avem, în conformitate cu cele două inegalităţi:

$$|(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| \leq |a_n - l_1| + |b_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ceea ce ne arată că

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = l_1 + l_2.$$

În mod analog se demonstrează că: dacă $l_1 = +\infty$ şi l_2 finit, atunci $l_1 + l_2 = +\infty$; dacă $l_1 = +\infty$ şi $l_2 = +\infty$, atunci $l_1 + l_2 = +\infty$, iar dacă $l_1 = -\infty$ şi $l_2 = -\infty$, atunci $l_1 + l_2 = -\infty$.

Observaţia 1.1.2 *Pentru $l_1 = +\infty$ şi $l_2 = -\infty$ operaţia $l_1 + l_2$ este fără sens (numit şi caz de excepţie sau caz de nedeterminare) deoarece în acest caz nu se poate preciza de la început valoarea lui $l_1 + l_2$, aceasta putând să fie orice număr real, $+\infty$, $-\infty$ sau să nu existe, în funcţie de (a_n) şi (b_n).*

Observaţia 1.1.3 *Afirmaţiile din Propoziţia 1.1.6 rămân valabile şi pentru un număr finit de termeni independent de n.*

Astfel, putem scrie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{k}{n}\right) = 0 \text{ (k independent de n)}$$

dar nu putem scrie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right) = \underbrace{0 + \ldots + 0}_{\infty\cdot 0} = 0$$

Corect, avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty.$$

Propoziţia 1.1.7 *Fie* (a_n) *şi* (b_n) *două şiruri de numere reale cu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$. *Dacă* $l_1 \cdot l_2$ *are sens, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_1 \cdot l_2$.

Demonstraţie. Să considerăm l_1 şi l_2 finite. Dacă $l_2 = 0$, atunci ţinând seama că a_n este mărginit, pe baza Observaţiei 1.1.1, găsim $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Să presupunem că $l_2 \neq 0$. Cum (a_n) este convergent, pe de o parte este mărginit, adică există $M > 0$ aşa încât $|a_n| < M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, iar pe de altă parte, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_{1\varepsilon} \in \mathbb{N}$ aşa încât

$$|a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2|l_2|}, \text{ pentru orice } n > n_{1\varepsilon}$$

Din $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_{2\varepsilon} \in \mathbb{N}$ aşa ca

$$|b_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2M}, \text{ pentru orice } n > n_{2\varepsilon}.$$

Considerând $n_\varepsilon = \max\{n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon}\}$, avem

$$|a_n b_n - l_1 l_2| = |a_n b_n - a_n l_2 + a_n l_2 - l_1 l_2| = |a_n(b_n - l_2) + l_2(a_n - l_1)| \leq$$

$$\leq |a_n|\ |b_n - l_2| + |l_2|\ |a_n - l_1| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |l_2| \frac{\varepsilon}{2|l_2|} = \varepsilon,$$

pentru orice $n > n_\varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = l_1 l_2$.

Analog se arată că: dacă l_1 finit şi $l_2 = +\infty$, atunci $l_1 \cdot l_2 = +\infty$, dacă $l_1 > 0$ şi $l_1 l_2 = -\infty$, dacă $l_1 < 0$, dacă l_1 finit şi $l_2 = -\infty$, atunci $l_1 l_2 = -\infty$, dacă $l_1 > 0$ şi $l_1 l_2 = +\infty$, dacă $l_1 < 0$; dacă $l_1 = +\infty$ şi $l_2 = -\infty$, atunci $l_1 l_2 = -\infty$, dacă $l_1 = +\infty$ şi $l_2 = +\infty$, atunci $l_1 l_2 = +\infty$ iar dacă $l_1 = -\infty$ şi $l_2 = -\infty$, atunci $l_1 l_2 = +\infty$.

Observaţia 1.1.4 *Pentru* $l_1 = 0$ *şi* $l_2 = \pm\infty$*, operaţia* $l_1 l_2$ *este fără sens.*

Observaţia 1.1.5 *Cele afirmate la Observaţia 1.1.3 rămân valabile şi la produsul de şiruri.*

Propoziţia 1.1.8 *Fie* (a_n) *un şir de numere reale cu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$*.*

i) Dacă $l \in \mathbb{R}^*$*, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{l}$*;*

ii) Dacă $l = +\infty$ *sau* $l = -\infty$*, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$*;*

iii) Dacă $l = 0$ *şi* $a_n > 0$ *pentru toţi* $n \geq n_0$*, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$*, iar dacă* $a_n < 0$ *pentru toţi* $n \geq n_0$*, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$*.*

Demonstraţie. i) Cum $l \neq 0$ rezultă că $1/a_n$ este definit cu excepţia eventual, a unui număr finit de termeni.

Cum $|\,|a_n| - |l|\,| \leq |a_n - l|$, Deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |l|$. Acum există $n_1 \in \mathbb{N}$ aşa încât $|\,|a_n| - |l|\,| < \frac{|l|}{2}$, de unde $|a_n| > \frac{|l|}{2}$, pentru orice $n \geq n_1$.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_{2/\varepsilon} \in \mathbb{N}$ aşa că

$$|a_n - l| < \frac{|l|^2}{2}\varepsilon, \text{ pentru orice } n > n_{2\varepsilon}.$$

Fie $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_{2\varepsilon}\}$; atunci

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|a_n - l|}{|a_n|\;|l|} < \frac{|l|^2\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|l|} \cdot \frac{2}{|l|} = \varepsilon,$$

pentru orice $n > n_\varepsilon$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{l}$.

În mod analog se demonstrează punctele ii) şi iii) din enunţul Propoziţiei 1.1.8.

Observaţia 1.1.6 *Folosind Propoziţiile 1.1.7 şi 1.1.8, acum, putem preciza limita câtului a două şiruri. Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$ *şi* l_1/l_2 *are sens (cazuri de excepţie sunt* $0/0$ *şi* $\pm\infty/\pm\infty$*), atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = l_1/l_2$.

Propoziţia 1.1.9 *Fie* (a_n) *şi* (b_n) *două şiruri de numere reale,* $a_n > 0$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

i) Dacă $a \in (0, \infty)$ *şi* $b \in \mathbb{R}$*, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$;

ii) Dacă $a = 0$ *şi* $b \in \mathbb{R} - \{0\}$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \begin{cases} 0 & , \textit{ pentru } b > 0 \\ +\infty & , \textit{ pentru } b < 0; \end{cases}$$

iii) Dacă $a \in (0, +\infty)$ *şi* $b = +\infty$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \begin{cases} \infty & , \textit{ pentru } a > 1 \\ 0 & , \textit{ pentru } a \in (0,1); \end{cases}$$

iv) Dacă $a \in (0, +\infty)$ *şi* $b = -\infty$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \begin{cases} 0 & , \textit{ pentru } a > 1 \\ \infty & , \textit{ pentru } a \in (0,1); \end{cases}$$

v) Dacă $a = +\infty$ *şi* $b \in (0, \infty)$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \begin{cases} +\infty & , \textit{ pentru } b > 0 \\ 0 & , \textit{ pentru } b < 0. \end{cases}$$

În cazul ridicării la putere avem cazurile de excepţii, situaţiile 0^0, ∞^0 şi 1^∞.

Pentru demonstraţie acestei propoziţii se poate consulta cartea [16].

Propoziţia 1.1.10 *Sunt adevărate afirmaţiile:*

i) Orice şir de numere reale monoton şi mărginit este convergent;

ii) Orice şir numeric crescător şi nemărginit are limita $+\infty$;

iii) Orice şir numeric descrescător şi nemărginit are limita $-\infty$.

Demonstraţie.

i) Fie (a_n) un şir crescător şi mărginit. Punem $\alpha = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Avem $a_n \leq \alpha$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece α este majorant, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ aşa încât $\alpha - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq \alpha$. Cum şirul (a_n) este crescător, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ va rezulta $a_n \geq a_{n_\varepsilon}$. Deci, $\alpha - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq \alpha$, de unde $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ pentru $n > n_\varepsilon$, ceea ce ne arată că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

ii) Fie (a_n) un şir numeric monoton crescător şi nemărginit. Atunci mulţimea termenilor şirului este mărginită inferior de a_1, dar nu este majorată. Rezultă că, pentru orice $E > 0$, există un $n_E \in \mathbb{N}$ aşa încât $a_{n_E} > E$. Acum, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, putem scrie $a_n \geq a_{n_\varepsilon} > E$, ceea ce ne arată că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

iii) Se demonstrează la fel ca ii).

Observaţia 1.1.7 *Propoziţia 1.1.10 se poate enunţa scurt: orice şir monoton de numere reale are o limită în $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Exemplul 1.1.11. Fie şirul $e_n = (1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să arătăm că (e_n) este convergent.

Să pornim de la identitatea

$$b^k - a^k = (b-a)(b^{k-1} + b^{k-2}a + \cdots + ba^{k-2} + a^{k-1}), \quad (1.1)$$

care este valabilă pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi orice k natural. Din (1.1), pentru $0 < a < b$, obţinem inegalitatea

$$b^k < a^k + k(b-a)b^{k-1}. \quad (1.2)$$

Luând în (1.2) $a = 1+1/(n+1)$, $b = 1+1/n$ şi $k = n+1$, găsim

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) e_n = b^{n+1} < a^{n+1} + \frac{n+1}{n(n+1)} b^n = e_{n+1} + \frac{1}{n} e_n,$$

de unde rezultă $e_n < e_{n+1}$, ceea ce ne arată că şirul (e_n) este strict crescător. Să arătăm că şirul (e_n) este mărginit superior. Luăm în (1.2) $a = 1$, $b = 1 + 1/(2n)$ şi $k = n$ şi obţinem

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 1 + n \cdot \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n-1} < 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n,$$

de unde găsim

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2,$$

care conduce la $e_{2n} < 4$. Deoarece (e_n) este un şir strict crescător, urmează că $e_n < 4$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Din punctul i) al Propoziţiei 1.1.10 deducem că şirul (e_n) este convergent. Limita şirului (e_n) se notează cu e, care este un număr des întâlnit în matematică şi ştiinţă. valoarea lui este $2,71828\ldots$.

Propoziţia 1.1.11 *(Lema lui Cesaró). Orice şir mărginit de numere reale conţine cel puţin un subşir convergent.*

Demonstraţie. Fie (a_n) un şir mărginit de numere reale. Considerăm submulţimile $A_k = \{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi notăm cu b_k marginile lor superioare (acestea există deoarece mulţimea $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots\}$ este mărginită). Din $A_k \supset A_{k+1}$, rezultă $b_k \geq b_{k+1}$ $k \in \mathbb{N}^*$, şi deci şirul (b_n) este descrescător. Cum $A_k \subset A_1$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ şi A_1 mărginită rezultă că şirul (b_k) este mărginit inferior. Rezultă că şirul (b_k) este convergent.

Dacă pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $b_k \in A_k$, atunci putem lua $b_k = a_{n_k}$ cu $n_k \geq k$. Din $n_k \geq k$ obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} n_k = \infty$, ceea ce ne arată că putem extrage un subşir (n_k) strict crescător de numere naturale, iar subşirul (a_{n_k}) va fi un subşir al şirului (a_n), care are limită.

Acum, să presupunem că există un indice $i \in \mathbb{N}$ aşa încât $b_i \notin A_i$. Din faptul că b_i este marginea superioară a mulţimii A_i, deducem că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există k_n aşa încât $b_i - \dfrac{1}{n} < a_{i+k_n} \leq b_i$, adică putem scrie $|a_{i+k_n} - b_i| < \dfrac{1}{n}$. De aici, pe baza criteriului majorării pentru limită finită, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i+k_n} = b_i$. Să arătăm că şirul (k_n) de numere naturale este nemărginit. Într-adevăr, dacă ar exista un n_0 astfel ca $k_n = k_{n_0}$, pentru toţi $n \geq n_0$, atunci am avea $|a_{i+k_{n0}} - b_i| \leq \dfrac{1}{n}$ pentru toţi $n > n_0$, ceea ce ar însemna că $a_{i+k_{n_0}} = b_i$ şi $b_i \in A_i$, ceea ce ar constitui o contradicţie. Prin urmare, subşirul (a_{i+k_n}) este un subşir convergent pentru şirul (a_n).

Definiţia 1.1.12 *Un şir (a_n) de numere reale se numeşte **şir fundamental** sau şir Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr natural n_ε, astfel încât pentru orice $n, m \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, $m > n_\varepsilon$ să avem $|a_m - a_n| < \varepsilon$.*

Dacă $n = m$, atunci condiţia din definiţia precedentă este evident satisfăcută. De aceea, putem considera, fără a restrânge generalitatea, că $m > n$, adică $m = n + p$, unde $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci Definiţia 1.1.12 se poate scrie sub forma echivalentă.

Definiţia 1.1.13 *Un şir (a_n) numeric se numeşte* ***şir fundamental*** *sau* ***şir Cauchy*** *dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr natural n_ε aşa încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}$ să avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.*

Propoziţia 1.1.12 *Orice şir fundamental de numere reale este mărginit*

Demonstraţie. Aplicăm Definiţia 1.1.12 pentru $\varepsilon = 1$. Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}$ aşa încât pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n > n_1$, $m > n_1$, să avem $|a_n - a_m| < 1$. Acum, putem scrie

$$|a_n| = |a_n - a_{n_1+1} + a_{n_1+1}| \leq |a_n - a_{n_1+1}| + |a_{n_1+1}| < 1 + |a_{n_1+1}|$$

pentru orice $n > n_1$. Dacă punem $\alpha = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_1}|, |1 + |a_{n_1+1}|\}$. atunci $|a_n| \leq \alpha$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, adică şirul (a_n) este mărginit.

Teorema 1.1.2 *(Criteriul lui Cauchy). Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.*

Demonstraţie. ***Necesitatea.*** Fie (a_n) un şir de numere convergent la l. Să arătăm că este fundamental. Din $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât $|a_n - l| < \varepsilon/2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$. Atunci, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n_\varepsilon$, $n > n_\varepsilon$ avem

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ceea ce ne dovedeşte că (a_n) este un şir fundamental.

Suficienţa. Să admitem că (a_n) este un şir fundamental şi să arătăm că există $l \in \mathbb{R}$ aşa încât $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Şirul (a_n) fiind fundamental, rezultă ca este mărginit (Propoziţia 1.1.12). Atunci conform Lemei lui Cesaró (Propoziţia 1.1.11), şirul (a_n) va conţine un subşir (a_{n_k}) convergent; fie l limita sa. Deoarece $a_{n_k} \to l$, pentru $k \to \infty$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât

$$|a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}, \ k > k_\varepsilon. \qquad (1.3)$$

Din faptul că (a_n) este şir fundamental avem că există $n_{1\varepsilon} \in \mathbb{N}$ aşa încât

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } n, m \in \mathbb{N}, \ n > n_{1\varepsilon}, \ m > n_{1\varepsilon}.$$

Fie acum $n_\varepsilon = \max\{k_\varepsilon, n_{1\varepsilon}\}$ şi luând $k > n_\varepsilon$ în (1.3), obţinem:

$$|a_n - l| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$.

Prin urmare, şirul (a_n) are limita $l \in \mathbb{R}$, adică este convergent.

Observaţia 1.1.8 *Criteriul lui Cauchy permite studierea convergenţei unui şir fără să cunoaştem limita lui. Pentru aceasta este suficient să cercetăm dacă şirul este fundamental.*

Exemplul 1.1.12. Să arătăm că şirul

$$a_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{2^n}, \ n \in \mathbb{R},$$

este şir Cauchy, deci convergent.

Avem

$$a_{n+p} = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{3^n} + \frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}},$$

cu $p \in \mathbb{N}^*$.

Atunci

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{3^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{3^{n+p}}=\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^p}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2\cdot 3^n}\left(1-\frac{1}{3^p}\right)<\frac{1}{2\cdot 3^n}.$$

Cum $1/2\cdot 3^n \to 0$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât $1/2\cdot 3^n < \varepsilon$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$. Atunci, pentru orice $n > n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$, avem $|a_{n+p}-a_n| < \varepsilon$, ceea ce ne asigură că (a_n) este şir Cauchy.

Exemplul 1.1.13. Să arătăm că şirul

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

nu este fundamental, deci nu este şir convergent.

Se observă că avem

$$a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{\text{de } n \text{ ori}}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

ceea ce ne arată că (a_n) nu poate fi şir Cauchy.

Aplicaţie economică. Dobânda compusă. Se investeşte o sumă S, dată într-o anumită unitate monetară, care acumulează o dobândă compusă de $r\%$ anual.

Dacă dobânda se adaugă anual, atunci la sfârşirul primului an vom avea suma

$$S_1 = S + rS = S(1+r).$$

După doi ani, vom avea suma

$$S_2 = S(1+r)^2,$$

iar după trecerea a k ani, suma acumulată va fi

$$S_k = S(1+r)^k.$$

Dacă dobânda s-ar adăuga de n ori pe an, atunci la trecereea a k ani am avea suma

$$S_{n,k} = S\left(1+\frac{r}{n}\right)^{kn}.$$

Se observă că şirul $(S_{n,k})$ este crescător în raport cu n. Apare întrebarea: dacă n ar creşte, adică adăugarea dobânzii s-ar face cât mai des, valoarea sumei acumulate în cei k ani, ar creşte foarte mult?

Pentru a răspunde la întrebare să calculăm limita şirului $(S_{n,k})$ când $n \to \infty$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,k} = \lim_{n\to\infty} S\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nk} = S\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{\frac{r}{n}\cdot nk} = Se^{rk},$$

ceea ce ne arată că, practic, valoarea sumei finale depinde de suma iniţială S, dobânda anuală r şi de numărul de ani k, influenţa desimii adăugării dobânzii fiind de mai mică importanţă.

De exemplu, dacă am depune o sumă $S = 1\$$ cu dobândă compusă anuală de 1% pe o perioadă de 1 an, oricât de des am adăuga dobânda, valoarea sumei acumulate la sfârşirul anului ar oscila în jurul lui $e = 2,71828\ldots\$$. (v. [2], [14], [23]).

1.2 Şiruri în spaţii metrice

În acest paragraf ne vom ocupa cu studiul şirurilor cu valori în spaţii metrice, particularizarea lor în spaţiile $\mathbb{R}$ şi principiul contracţiei.

Definiţia 1.2.1 *Se numeşte* ***şir de puncte*** *în spaţiul metric (X, d) o aplicaţie a mulţimii $N^* = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ în X.*

Pentru un astfel de şir folosim notaţia $(x_n)_{n\geq 1}$ sau simplu (x_n) ca şi în cazul şirurilor de numere reale.

Definiţia 1.2.2 *Şirul de puncte (x_n) din spaţiul metric (X, d) este* ***convergent la*** $x \in X$ *dacă şirul de numere reale pozitive $(d(x_n, x))$ are limita zero.*

Ca şi la şirurile reale folosim notaţia $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

Altfel spus, şirul $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ în spaţiul metric (X, d) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $d(x_n, x) < \varepsilon$ dacă $n > n_\varepsilon$.

Propoziţia 1.2.1 *Dacă şirul de numere* $((x_n)$ *din* (X, d) *este convergent în spaţiul metric* (X, d)*, atunci limita lui este unică.*

Demonstraţie. Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Din Definiţia 1.2.2 avem $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$. Atunci din $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$ avem $d(x, y) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) + \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$, de unde deducem că $d(x, y) = 0$. Deci avem $x = y$.

Definiţia 1.2.3 *Şirul de puncte* (x_n) *din spaţiul metric* (X, d) *este* ***mărginit*** *dacă există* $x_0 \in X$ *şi* $M > 0$ *aşa încât* $d(x_n, x_0) \leq M$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

Propoziţia 1.2.2 *Orice şir convergent de puncte din spaţiul metric* (X, d) *este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; pentru $\varepsilon = 1$ există $n_1 \in \mathbb{N}$ aşa încât $d(x_n, x) < 1$, oricare ar fi $n > n_1$. Punând $M = \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \ldots, d(x_{n_1}, x), 1\}$, avem $d(x_n, x) \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce ne arată că şirul de puncte (x_n) este mărginit în (X, d).

Definiţia 1.2.4 *Şirul de puncte* (y_n) *din spaţiul* (X, d) *este* ***subşir*** *al şirului de puncte* (x_n) *din* (X, d) *dacă există un şir* $(k_n)_{n\geq 1}$ *de numere naturale, strict crescător, aşa încât* $y_n = x_{k_n}$.

Propoziţia 1.2.3 *Dacă şirul de puncte* (x_n) *este convergent la* x *în* (X, d)*, atunci orice subşir al său are de asemenea limita* x.

Demonstraţie. Valabilitatea propoziţiei rezultă din Propoziţia 1.1.11, de la şiruri de numere reale deoarece dacă (y_n) este un subşir al şirului de puncte (x_n), atunci şirul real $(d(y_n, x))$ este subşir al şirului numeric $(d(x_n, x))$.

Propoziţia 1.2.4 (Criteriul majorării). *Dacă pentru şirul de puncte* (x_n) *din* (X, d) *există* $x \in X$ *şi şirul* (a_n) *de numere reale aşa ca* $d(x_n, x) \leq |a_n|$ *şi* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *atunci* (x_n) *este convergent şi* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Demonstraţia se obţine folosind criteriul majorării de la şiruri de numere reale şi Definiţia 1.2.2.

Definiţia 1.2.5 *Şirul de puncte* (x_n) *din* (X, d) *se numeşte* ***şir fundamental*** *sau* ***şir Cauchy*** *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *aşa încât pentru orice* $n, m \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, $m > n_\varepsilon$, *să avem* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Dacă în Definiţia 1.2.5 luăm $m = n + p$, $p \in \mathbb{N}^*$, atunci obţinem formularea echivalentă: şirul (x_n) din (X, d) este fundamental dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, avem $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.

Propoziţia 1.2.5 *Orice şir fundamental în spaţiul metric* (X, d) *este mărginit.*

Demonstraţie. Fie (x_n) un şir Cauchy în (X, d). Pentru $\varepsilon = 1$ există $n_1 \in \mathbb{N}$ aşa încât, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n > n_1$, $m > n_1$, să avem $d(x_n, x_m) < 1$. Dacă punem

$$M = \max\{1, d(x_1, x_{n_1+1}), d(x_2, x_{n_1+2}), \ldots, d(x_{n_1}, x_{n_1+1})\}$$

atunci $d(x_n, x_{n_1+1}) \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, şirul (y_n) este mărginit în (X, d).

Teorema 1.2.1 *Orice şir convergent de puncte din* (X, d) *este şir Cauchy în* (X, d).

Demonstraţie. Fie (x_n) un şir convergent de puncte din (X, d). Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in X$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există n_ε aşa încât, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, să avem $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Cum pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ şi orice $n \in N$, $n > n_\varepsilon$, avem şi $d(x_{n+p}, x) < \varepsilon/2$, putem scrie

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x) + d(x, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

pentru orice $n > n_\varepsilon$. De aici, rezultă că şirul (x_n) este şir fundamental.

Reciproca Teoremei 1.2.1 nu este adevărată în orice spaţiu metric.

Exemplul 1.2.1. În spaţiul metric $(\mathbb{R}, |\ |)$, ínzestrat cu metrica dată de modul, şirul $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent (deci şi fundamental) şi are limita e.

Spaţiul metric $(Q, |\ |)$ este un subspaţiu al lui $(\mathbb{R}, |\ |)$. Proprietatea şirului (e_n) de a fi fundamental se păstrează şi în $(Q, |\ |)$, dar el nu mai este convergent în $(Q, |\ |)$ deoarece numărul $e \notin Q$ (e este număr iraţional).

Definiţia 1.2.6 *Spaţiul metric (X, d) se numeşte* ***complet*** *dacă orice şir fundamental din (X, d) este convergent în (X, d).*

Exemplul 1.2.2. Spaţiul metric $(\mathbb{R}, |\ |)$ este complet pe baza criteriului lui Cauchy (v. Teorema 1.1.2).

Definiţia 1.2.7 *Un spaţiu vectorial normat şi complet se numeşte* ***spaţiu Banach****, iar un spaţiu prehilbertian şi complet se numeşte* ***spaţiu Hilbert****.*

Fie (X, d_1), (Y, d_2) două spaţii metrice şi $Z = X \times Y$ produsul cartezian al celor două spaţii metrice. Dacă $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ sunt două puncte din Z, atunci definim

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{d_1^2(x_1, x_2) + d_2^2(y_1, y_2)}.$$

Propoziţia 1.2.6 *(Z, d) este un spaţiu metric.*

Demonstraţie. Trebuie să verificăm pentru d axiomele metricii.
1. Evident $d(z_1, z_2) \geq 0$, oricare ar fi $(z_1, z_2) \in Z$. Dacă $d(z_1, z_2) = 0$, atunci $d_1(x_1, x_2) = 0$ şi $d_2(y_1, y_2) = 0$, de unde rezultă $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, adică $z_1 = z_2$.
2. $d(z_1, z_2) = \sqrt{d_1^2(x_1, x_2) + d_2^2(y_1, y_2)} = \sqrt{d_1^2(x_2, x_1) + d_2^2(y_2, y_1)} = d(z_2, z_1)$, oricare ar fi $z_1, z_2 \in Z$.
3. Fie $z_3 = (x_3, y_3)$ încă un punct arbitrar din Z. Avem

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{d_1^2(x_1, x_2) + d_2^2(y_1, y_2)} \leq$$

$$\leq \sqrt{(d_1(x_1, x_3) + d_1(x_3, x_2))^2 + (d_2(y_1, y_3) + d_2(y_3, y_2))^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{d_1^2(x_1, x_3) + d_2^2(y_1, y_3)} + \sqrt{d_1^2(x_3, x_2) + d_2^2(y_3, y_2)} =$$

$$= d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2),$$

adică d verifică inegalitatea triunghiului.

Prin urmare (Z, d) este spaţiu metric.

Observaţia 1.2.1 *Valabilitatea Propoziţiei 1.2.6 se poate extinde la produsul cartezian al unui număr finit de spaţii metrice.*

Teorema 1.2.2 *Şirul $z_n = (x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, din spaţiul metric (Z, d) este convergent către $z = (x, y) \in Z$ dacă şi numai dacă, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.*

Demonstraţie. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât, pentru orice $n > n_\varepsilon$, să avem $d(z_n, z) < \varepsilon$. Cum

$$d_1(x_n, x) \leq \sqrt{d_1^2(x_n, x) + d_2^2(y_n, y)} = d(z_n, z) < \varepsilon$$

şi

$$d_2(y_n,y) \le \sqrt{d_1^2(x_n,x)+d_2^2(y_n,y)} = d(z_n,z) < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, ceea ce trebuie demonstrat.

Reciproc, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_{1\varepsilon}$ aşa încât, pentru orice $n > n_{1\varepsilon}$, să avem $d_1(x_n,x) < \varepsilon/\sqrt{2}$ şi există $n_{2\varepsilon}$ astfel încât, pentru orice $n > n_{2\varepsilon}$, să avem $d_2(y_n,y) < \varepsilon/\sqrt{2}$.

Cum, pentru orice $n > n_\varepsilon$, $n_\varepsilon = \max\{n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon}\}$ avem

$$d(z_n,z) = \sqrt{d_1^2(x_n,x)+d_2^2(y_n,y)} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon,$$

rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Din Teorema 1.2.2 rezultă că putem scrie

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

Observaţia 1.2.2 *Rezultatul Teoremei 1.2.2 rămâne valabil şi la produsul cartezian al unui număr finit de spaţii metrice.*

Corolarul 1.2.1 *Un şir din spaţiul $\mathbb{R}^m$ este convergent, dacă şi numai dacă, şirurile reale componente sunt convergente.*

Valabilitatea corolarului rezultă din Teorema 1.2.1 şi faptul că $\mathbb{R}^m$ este produsul cartezian al spaţiului metric $\mathbb{R}$, repetat de m ori.

Exemplul 1.2.3. Să calculăm limita şirului din $\mathbb{R}^3$

$$z_n = \left(\sqrt[n]{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right), \frac{3n^2-n+1}{4n^2+n+1}\right), n \ge 2.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}, \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right), \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+1}{4n^2+n+1}\right) =$$

$$= \left(1, e, \frac{3}{4}\right).$$

Teorema 1.2.3 *Şirul de puncte $z_n = (x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, din spaţiul metric (Z, d) este şir fundamental, dacă şi numai dacă, (x_n) şi respectiv (y_n) sunt şiruri fundamentale în (X, d_1) şi respectiv (Y, d_2).*

Demonstraţie. Să considerăm, mai întâi, că şirul (z_n) este fundamental în (Z, d), adică, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât, pentru orice $n > n_\varepsilon$, să avem $d(z_{n+p}, z_n) < \varepsilon$. Deoarece

$$d_1(x_{n+p}, x_n) \leq \sqrt{d_1^2(x_{n+p}, x_n) + d_2^2(y_{n+p}, y_n)} = d(z_{n+p}, z_n) < \varepsilon$$

şi

$$d_2(y_{n+p}, y_n) \leq \sqrt{d_1^2(x_{n+p}, x_n) + d_2^2(y_{n+p}, y_n)} = d(z_{n+p}, z_n) < \varepsilon$$

pentru orice $p \in \mathbb{N}$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, rezultă că şirul (x_n) şi respectiv (y_n) sunt fundamentale în (X, d_1) şi respectiv (Y, d_2).

Reciproc, fie (x_n) şi respctive (y_n) şiruri fundamentale în (X, d_1) şi respectiv (Y, d_2). Să arătăm ca $z_n = (x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ este şir fundamental în (Z, d).

Pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât, pentru orice $n > n_{1\varepsilon}$ să avem

$$d_1(x_{n+p}, x_n) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

şi există $n_{2\varepsilon} \in \mathbb{N}$ aşa încât pentru orice $n > n_{2\varepsilon}$ să avem

$$d_2(y_{n+p}, y_n) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Deoarece, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, $n_\varepsilon = \max\{n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon}\}$ avem

$$d(z_{n+p}, z_n) = \sqrt{d_1^2(x_{n+p}, x_n) + d_2^2(y_{n+p}, y_n)} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon,$$

deducem că şirul (z_n) este fundamental în (Z, d).

Din Teorema 1.2.3 rezultă că şirul $z_n = (x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, din (Z, d) este fundamental, dacă şi numai dacă, componentele sale (x_n), respectiv (y_n) sunt şiruri fundamentale în (X, d_1) şi respectiv (Y, d_2). Prin urmare, spaţiul (Z, d) este complet, dacă şi numai dacă, (X, d_1) şi (Y, d_2) sunt complete.

Observaţia 1.2.3 *Rezultatul Teoremei 1.2.3 rămâne valabil şi la produsul cartezian al unui număr finit de spaţii metrice.*

Corolarul 1.2.2 *Spaţiile $\mathbb{R}^m$ sunt complete.*

Valabilitatea corolarului rezultă din Observaţia 1.2.3 şi din faptul că spaţiul $\mathbb{R}$ este complet (Exemplul 1.2.2).

Definiţia 1.2.8 *În spaţiul metric (X, d), o funcţie $f : X \to X$ se numeşte* ***contracţie****, dacă există $\alpha \in [0, 1)$ aşa încât, oricare ar fi $x, y \in X$ avem*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y). \tag{1.4}$$

Exemplul 1.2.4. Fie $X = \mathbb{R}^m$ cu metrica euclidiană

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2},$$

unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in X$. Considerăm aplicaţia $f : X \to X$ dfinită prin $f(x) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_m)$, $\alpha \in [0, 1)$. Avem

$$d(f(x), f(y)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\alpha x_i - \alpha y_i)^2} = \alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2} = \alpha d(x, y),$$

pentru orice $x, y \in X$, adică (1.4) este verificată pentru $\alpha \in [0, 1)$, ceea ce ne arată că f este o contracţie.

Exemplul 1.2.5. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + b}, \ a > 0, \ b > 0, \ a < b\sqrt{b}$$

este o contracţie a spaţiului metric $(\mathbb{R}, | \, |)$.

În adevăr, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y) = \left| \frac{a}{x^2+b} - \frac{a}{y^2+b} \right| =$$

$$\frac{a|x+y|}{(x^2+b)(y^2+b)} d(x,y).$$

Cum $|t| \leq (t^2+b)/2\sqrt{b}$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, putem scrie

$$|x+y| \leq |x| + |y| \leq \frac{x^2+b}{2\sqrt{b}} + \frac{y^2+b}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2\sqrt{b}}(x^2+y^2+2b) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{b}} \frac{2}{b}(x^2+b)(y^2+b) = \frac{1}{b\sqrt{b}}(x^2+b)(y^2+b)$$

Atunci

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{a}{b\sqrt{b}} d(x,y),$$

cu $\alpha = a/b\sqrt{b} \in [0,1)$, ceea ce ne arată că f este o contracţie a spaţiului metric $\mathbb{R}$.

Numeroase probleme practice conduc la rezolvarea unei relaţii de forma $f(x) = x$, unde f este o aplicaţie a unui spaţiu metric X în el însăşi. Un astfel de punct $x \in X$ pentru care $f(x) = x$ se numeşte ***punct fix*** al funcţiei f.

Astfel, dacă f este aplicaţia identică a unui spaţiu metric în el însuşi, adică $f(x) = x$, pentru orice $x \in X$, atunci toate punctele lui X sunt puncte fixe.

În continuare vom prezenta un rezultat fundamental al Analizei Matematice, cu multe aplicaţii în matematică şi ştiinţele practice, numit ***principiul contracţiei*** sau ***teorema de punct fix a lui Banach*** care asigură, în anumite condiţii, existenţa şi unicitatea unui punct fix.

Teorema 1.2.4 (Principiul contracţiei). *Orice contracţie a unui spaţiu metric complet în el însuşi admite un singur punct fix.*

Demonstraţie. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $f : X \to X$ o contracţie a sa.

Unicitatea punctului fix. Să admitem că ar exista două puncte fixe x şi y din X, cu $x \neq y$, aşa încât $f(x) = x$ şi $f(y) = y$. Atunci

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d((x, y), \alpha \in [0, 1),$$

de unde

$$(1 - \alpha)d(x, y) \leq 0.$$

Cum $d(x, y) > 0$ şi $(1 - \alpha) > 0$, avem o contradicţie. Prin urmare, presupunerea noastră este falsă, deci există un singur punct fix.

Existenţa punctului fix. Să considerăm $x_0 \in X$ un punct arbitrar şi să definim recurent şirul (x_n) prin $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$, ...

Vom arăta că şirul (x_n) este un şir fundamental.

Avem

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha d(x_1, x_0),$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq \alpha d(x_2, x_1) \leq \alpha^2 d(x_1, x_0).$$

Prin inducţie matematică deducem că

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0), \text{ pentru orice } n \in N. \tag{1.5}$$

Pentru n, p numere naturale, $p \neq 0$, conform cu (1.5), putem scrie

$$\begin{gathered} d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots + \\ +d(x_{n+1}, x_n) \leq (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \ldots + \alpha^n)d(x_1, x_0) = \\ = \alpha^n \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Să luăm $d(x_1, x_0) > 0$ (în caz contrar, punctul fix este x_0 şi demonstraţia existenţei este terminată). Deoarece

$\alpha \in [0,1)$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, de unde pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât, pentru orice $n > n_\varepsilon$, avem

$$\alpha^n < \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{d(x_1, x_0)}. \tag{1.7}$$

Din (1.6) şi (1.7) rezultă că, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, adică şirul (x_n) este fundamental.

Cum (X, d) este spaţiul metric complet, există $x \in X$ aşa încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Mai trebuie arătat că x este punct fix.

Într–adevăr, putem scrie

$$d(f(x), x) \leq d(f(x), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x) = d(f(x), f(x_n)) +$$
$$+ d(x_{n+1}, x) \leq \alpha d(x, x_n) + d(x_{n+1}, x).$$

De aici, folosind că $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x) = 0$ şi ţinând cont de criteriul majorării pentru şiruri reale, deducem că $d(f(x), x) = 0$, adică $f(x) = x$.

Demonstraţia teoremei lui Banach de punct fix ne arată nu numai existenţa şi unicitatea punctului fix, ci şi o metodă de aflare a punctului fix x şi de asemenea, punerea în evidenţă a unei formule pentru evaloarea erorii ce se comite considerând respectiva aproximaţie.

Într–adevăr, deoarece

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0) + d(x_{n+p}, x),$$

rezultă, pentru $p \to \infty$ că

$$d(x_n, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0),$$

inegalitatea ce ne arată cu ce eroare aproximează x_n punctul fix x.

În acest fel, pornind de la $x_0 \in X$ arbitrar, punctele

$x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, apar drept aproximaţii succesive ale punctului fix x, ceea ce face ca metoda de aproximare să poarte numele de ***metoda aproximaţiilor succesive***.

În aplicarea efectivă a metodei aproximaţiilor succesive partea dificilă constă în determinarea convenabilă a spaţiului metric complet (X, d) şi a contracţiei f. Cu toată această dificultate, metoda aproximaţiilor succesive este una dintre cele mai puternice procedee de aproximare numerică a multor probleme puse de matematică şi ştiinţele practice (inclusiv cele economice).

Exemplul 1.2.6. Fie ecuaţia $x^3 + 4x - 1 = 0$ şi să ne propunem să-i găsim aproximativ singura rădăcină reală pe care o are (demonstraţi acest fapt !).

Scriem ecuaţia sub forma

$$x = \frac{1}{x^2 + 4}$$

şi considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(x^2 + 4)$.

Din Exemplul 1.2.5, pentru $a = 1$ şi $b = 4$, găsim că f este o contracţie a spaţiului metric $(\mathbb{R}, |\ |)$, cu $\alpha = 1/8$. Pe baza principiilor contracţiei f are un singur punct fix x şi deci ecuaţia dată va avea o singură rădăcină reală. Folosind şirul aproximaţiilor succesive, considerând $x_0 = 0$, găsim:

$$\begin{array}{l} x_1 = f(x_0) = \dfrac{1}{4} = 0,25 \\ x_2 = f(x_1) = 0,2461 \\ x_3 = f(x_2) = 0,2463, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

iar x_n va aproxima pe x cu o eroare $d(x_n, x) \leq \dfrac{2}{7 \cdot 8^n}$.

1.3 Probleme

1. Arătaţi că dacă (n_k) este un şir crescător de numere naturale, atunci $n_k \geq k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.
2. Studiaţi mărginirea şi monotonia următoarelor şiruri:

a) $a_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

b) $a_n = 2(-1)^n + \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

c) $a_n = \dfrac{2n+1}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

d) $a_n = \dfrac{3n+1}{3n+2}$, $n = 1, 2, \ldots$.

3. Arătaţi că şirul $z_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$, $n = 1, 2, \ldots$, are limita e.
4. Fie $a_1 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$ şi $a_{n+1} = 5a_n^2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Precizaţi natura şirului (a_n).
5. Găsiţi limitele următoarelor şiruri:

a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n}$, $n = 1, 2, \ldots$;

b) $a_n = \sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + n + 1} - \sqrt{4n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$;

c) $a_n = \left(\dfrac{2n^2 - n + 1}{2n^2 + 3n + 2}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n+1}}$, $n = 1, 2, \ldots$;

d) $a_n = \dfrac{a^{n+1} + 3a^2 + a + 1}{a^n + a^2 + 1}$, $a \in \mathbb{R}$;

e) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^4 + n^3 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^4 + n^3 + 2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^4 + n^3 + n}}$, $n = 1, 2, \ldots$;

f) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+2000)}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

g) $a_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\dots(k+2000)}{n^{2002}}$, $n = 1, 2, \dots$.

6. Arătaţi că şirul $a_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \dots$, nu este şir Cauchy. Este (a_n) convergent?

7. Arătaţi că şirul (a_n) definit astfel $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_n$, $n = 1, 2, \dots$, este convergent.

8. Să se arate că şirul $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} - \ln n$, $n \geq 1$ este convergent. Limita acestui şir se notează cu C (uneori cu γ) şi se numeşte constanta lui Euler. Valoarea ei este $0,5772\dots$.

9. Fie (a_n) un şir numeric arbitrar şi (b_n) un şir strict monoton divergent. Să se arate că dacă există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \mathbb{R},$$

atunci există şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

(teorema lui Stolz–Cessaró).

10. Utilizând Teorema lui Stolz–Cesaró (v.problema 9.), arătaţi că dacă (x_n) este un şir de numere reale strict pozitive, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

Calculaţi limitele:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}$, $a, b \in (-1, 1)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{n \ln n}$;

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}$;

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3+2n^2+n+1}+\sqrt{4n^2+n+1}-an\right)$, $a \in \mathbb{R}$;

f) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+k}$;

g) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$.

11. Utilizând criteriul lui Cauchy, arătaţi că:

i) şirurile

$$a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2},\ b_n = \frac{\sin x}{3}+\frac{\sin 2x}{3^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{3^n},$$

$n \in \mathbb{N}^*$, sunt convergente;

ii) sumele

$$c_n = 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

$$d_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1},\ n=1,2,\ldots,$$

sunt divergente.

12. Arătaţi că:

i) şirul $x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ este strict crescător şi mărginit;

ii) şirul $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este strict descrescător şi mărginit.

13. Fie şirul $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$:

$$x_n = \left(\frac{n+1}{2n^2+1}, \frac{3n+1}{2n+1}\right)$$

Arătaţi că (x_n) este convergent în $\mathbb{R}^2$.

14. În spaţiile metrice $\mathbb{R}^m$, calculaţi limitele şirurilor:

a) $x_n = \left(\frac{\ln n}{n}, n\cos\frac{\pi}{2^n}, \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right), n \in N^*;$

b) $x_n = \left(\sqrt[n]{\frac{2n+1}{2n+3}},\ \frac{3^n+n}{4^n+n^2},\ n(\sqrt[n]{3}-1)\right), n \in \mathbb{N}^*;$

c) $x_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}, \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \right.$
$\left. +\sqrt{n}, \sqrt[n]{8n^3+n^2+n+1} - 2n\right), n \in \mathbb{N}^*;$

d) $x_n = \left(\frac{n}{3^n}, \frac{n}{\sqrt{n!}}, \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right), n \in \mathbb{N}^*;$

e) $x_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k^4+1}\right), n \in \mathbb{N}^*;$

f) $x_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3^k}, \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{2000}}{n^{2001}}, \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}\right), n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R};$

g) $x_n = \left(\frac{n!}{a^n}, \frac{n^n}{n!}, \frac{2^n+3^n}{5^n}\right), n \in \mathbb{N}^*, a \geq 1.$

15. Arătaţi că $I = (0,1)$ este spaţiu metric cu metrica euclidiană $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in I$. Este I spaţiu metric complet?

16. Şirul

$$x_n = \left(\frac{n^2+1}{2n^3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right),\ n = 1, 2, \ldots,$$

este fundamental în spaţiul metric $\mathbb{R}^2$?

17. Folosind metodele aproximaţiilor succesive, găsiţi rădăcina ecuaţiei $x^3 + 2x - 1 = 0$ cu şase zecimale exacte.

18. Arătaţi că dacă:

i) (x_n) şi (y_n) sunt şiruri convergente în spaţiul metric (X, d), atunci $(d(x_n, y_n))$ este un şir convergent în $\mathbb{R}$;

ii) (x_n) şi (y_n) sunt şiruri fundamentale în (X, d), atunci $(d(x_n, y_n))$ este şir fundamental în $\mathbb{R}$.

19. Fie sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

cu $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, n}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $a_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Aplicaţi metoda aproximaţiilor succesive la rezolvarea acestui sistem, folosind spaţiile metrice complete $\mathbb{R}^n$.

20. Arătaţi că funcţia $f : (0, 1] \to (0, 1]$, $f(x) = x/3$ este o contracţie a spaţiului metric $((0, 1], |\ |)$ şi totuşi, nu are punct fix în $(0, 1]$.

1.4 Test de verificare a cunoştinţelor nr. 1

1. Definiţi următoarele noţiuni:

    a) Şir de numere reale convergent;

    b) Şir de numere reale fundamental;

    c) Şir într-un spaţiu metric;

    d) Spaţiu metric complet.

2. Enunţaţi:

    a) Criteriul lui Cauchy pentru şiruri de numere reale;

    b) Principiul contracţiei.

3) Utilizând criteriul lui Cauchy să se arată că următoarele şiruri sunt convergente:

    a) $a_n = \dfrac{2n+1}{5n+2}$;

    b) $b_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{2^n}$;

    c) $c_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + ... + a_n q^n$ cu $|a_k| < M$ $(\forall) k \in \mathbb{N}$ şi $|q| < 1$;

    d) $d_n = \dfrac{\cos x}{3} + \dfrac{\cos 2x}{3^2} + ... + \dfrac{\cos nx}{3^n}$;

    e) $e_n = \dfrac{\cos a_1}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos a_2}{2 \cdot 3} + ... + \dfrac{\cos a_n}{n(n+1)}$ cu $a_i \in \mathbb{R}$ $(\forall)$ $i \in \mathbb{N}$.

4. Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} z_n$, unde $z_n = x_n + i y_n$ cu

$$x_n = \prod_{k=1}^{n} a^{\frac{k}{(k+1)!}}\ , \qquad a > 1 \ \text{ şi } \ y_n = \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}}.$$

5. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} u_n$, $u_n = (u'_n, u''_n, u'''_n)$, cu

$$u'_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1},$$

$$u''_n = n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right),$$

$$u'''_n = \frac{1}{\sqrt[9]{9n^9+5n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[9]{9n^9+5n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[9]{9n^9+5n^2+n}}.$$

6. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}$, $u_n = (u'_n, u''_n, u'''_n)$, cu

$$u'_n = \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^n},$$

$$u''_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{2}}{b}\right)^n \text{ cu } a, b \in \mathbb{R}_+^*,$$

$$u'''_n = \frac{3^{3n}}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^{3n}}.$$

7. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} u_n$, $u_n = (u'_n, u''_n, u'''_n)$ cu

$$u'_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k}{(n+1)!},$$

$$u''_n = \sin\left(n\pi\sqrt[3]{n^3+3n^2+4n-5}\right),$$

$$u'''_n = n + 1 - \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + ... + \frac{k-1}{k!}\right).$$

8. Într-o progresie aritmetică, în care al n-lea termen este a_n şi suma primilor n termeni S_n, avem $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$. Să se arate că $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

9. Să se determine limita inferioară şi limita superioară pentru şirul (a_n) cu $a_n = a^{(-1)^{n+1}} + \frac{1}{n}$, $a > 0$.
10. Folosind principiul contracţiei găsiţi cu o eroare de 10^{-2} soluţia ecuaţiei $10x - 1 = \sin x$.

Capitolul 2

Serii numerice

" A gândi înseamnă a te înâlţa"
(Victor Hugo)

2.1 Noţiuni preliminare

Se cunoaşte că pentru orice număr finit de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, putem efectua suma lor, utilizând proprietatea de asociativitate a adunării de numere reale. Astfel, mai întâi calculăm $a_1 + a_2$, apoi se efectuează

$$a_1+a_2+a_3 = (a_1+a_2)+a_3, \quad a_1+a_2+a_3+a_4 = (a_1+a_2+a_3)+a_4$$

şi, în general

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n.$$

Acum, este firesc să ne punem problema efectuării sumei termenilor unui şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, adică a unei sume cu un număr infinit de termeni.

Definiţia 2.1.1 *Fiind dat şirul de numere reale* (a_n)*, se numeşte* **serie de numere reale** *sau* **serie numerică**

problema adunării termenilor şirului (a_n), adică problema efectuării sumei

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots . \tag{2.1}$$

În locul sumei (2.1) scriem prescurtat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sau* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *sau simplu* $\sum a_n$, *a_n fiind numit* ***termenul general*** *al seriei numerice.*

Prin urmare, observăm că seriile numerice constituie problema adunării unei infinităţii numărabile de numere reale.

Cum ştim efectua adunări de numere reale în care numărul termenilor este finit, dar oricât de mare, este natural ca pentru efectuarea sumei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să utilizăm sume finite de tipul $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, în care să facem pe n să tindă la infinit.

Definiţia 2.1.2 *Numin* ***sumă parţială*** *a seriei numerice* $\sum a_n$, *suma*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

iar şirul de numere reale (S_n) se numeşte ***şirul sumelor parţiale****.*

Observaţia 2.1.1 *În literatura matematică, deseori, se defineşte seria numerică* $\sum a_n$ *prin cuplul de şiruri (a_n) şi (S_n) ([9], [17]).*

Definiţia 2.1.3 *Spunem că seria* $\sum a_n$ *este* **convergentă** *dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent.*

În acest caz, dacă $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, *atunci* S *se numeşte* ***suma seriei*** $\sum a_n$ *şi scriem*

$$S = \sum a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$$

Definiţia 2.1.4 *Spunem că seria* $\sum a_n$ *este* ***divergentă****, dacă şirul sumelor parţiale* (S_n) *este divergent.*

Exemplul 2.1 Seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, unde $a, q \in \mathbb{R}$, se numeşte ***serie geometrică*** . Dacă $a = 0$, avem $S_n = 0$ pentru orice $q \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că seria este convergentă, având suma 0. Să considerăm $a \neq 0$. Atunci, pentru $q \neq 1$, avem

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^n = a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

iar pentru $q = 1$

$$S_n = a(n + 1).$$

Pentru $q \in (-1, 1)$, deoarece $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, avem $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$. Prin urmare, pentru $|q| < 1$, seria geometrică este convergentă, având suma $S = a/(1 - q)$.

Dacă $q \geq 1$, atunci şirul (S_n) are limita $+\infty$ sau $-\infty$ după cum $a > 0$ sau, $a < 0$, iar pentru $q \leq -1$ limita şirului (S_n) nu există. Deci, pentru $|q| \geq 1$ seria geometrică este divergentă. În concluzie, seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ cenverge pentru $a = 0$, oricare $q \in \mathbb{R}$ şi pentru $a \neq 0$ şi $q \in (-1, 1)$. Prin urmare, pentru $|q| < 1$, putem scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + \ldots + aq^n + \ldots = \frac{a}{1 - q}.$$

Exemplul 2.1.2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ este convergentă. Într-adevăr, avem

$$S_n = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{(2h-1)(2h+1)} = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2h-1} - \frac{1}{2h+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Prin urmare, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$, ceea ce arată că seria dată este convergentă, având suma $1/2$.

Observaţia 2.1.2 *O serie* $\sum a_n$ *în care termenul general se poate pune sub forma* $a_n = b_n - b_{n+1}$ *poartă numele de* ***serie telescopică***.

Exemplul 2.1.3. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ este divergentă deoarece $S_{2k-1} = 1$ şi $S_{2k} = 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, şirul sumelor parţiale (S_n) fiind divergent.

Exemplul 2.1.4. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, numită ***seria armonică***, este divergentă.

În adevăr, şirul sumelor parţiale $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ este divergent deoarece nu este şir Cauchy (v. Exemplul 1.1.13).

Observaţia 2.1.3 *Seria* $\sum \frac{1}{n}$ *este numită serie armonică deoarece* $a_n = 1/n$ *este media armonică a numerelor* a_{n-1}, a_{n+1}, *adică* $2/a_n = 1/a_{n-1} + 1/a_{n+1}$.

Propoziţia 2.1.1 *Dacă seria* $\sum a_n$ *converge, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstraţie. Seria $\sum a_n$ fiind convergentă , avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Dar $a_n = S_n - S_{n-1}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Corolarul 2.1.1 *Dacă pentru seria* $\sum a_n$ *şirul* (a_n) *nu converge la* 0*, atunci seria este divergentă.*

Observaţia 2.1.4 *Condiţia* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *este necesară dar nu şi suficientă pentru convergenţa seriei* $\sum a_n$.

De exemplu, seria armonică $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă, deşi $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Exemplul 2.1.5. Seria $\sum\limits_{n\geq 2} \sqrt[n]{n}$ este divergentă deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$.

Definiţia 2.1.5 *Fiind dată seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *numim* ***rest de ordinul*** k *al ei, notat cu* r_k *seria*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$$

Propoziţia 2.1.2 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *seria rest* $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ *au aceeaşi natură, adică sunt ambele convergente sau ambele divergente.*

Demonstraţie. Fie $n > k$; notăm cu S_n şi respectiv T_n sumele parţiale corespunzătoare termenului a_n din seria $\sum a_n$ şi respectiv $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Avem

$$T_n = S_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k).$$

Dacă $\sum a_n$ este convergentă, adică $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, atunci $\lim_{n\to\infty} T_n = S - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$, ceea ce ne arată că seria $\sum_{n=k+1} a_n$ este tot convergentă. Reciproc, dacă $\sum_{n=k+1} a_n$ este convergentă, adică $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, atunci $\lim_{n\to\infty} S_n = T + (a_1 + \ldots + a_k)$, ceea ce arată că seria $\sum a_n$ este convergentă.

Evident că, dacă unul din şirurile (S_n) şi $T_n)$ este divergent atunci şi celălalt este divergent. Prin urmare, dacă una din seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci şi cealaltă este divergentă.

Corolarul 2.1.2 *Dacă unei serii numerice i se suprimă sau i se adaugă un numă finit de termeni, atunci natura ei nu se schimbă.*

Propoziţia 2.1.3 *Dacă seria* $\sum a_n$ *converge atunci şirul resturilor* $(r_k)_{k\geq 1}$ *este convergent la zero.*

Demonstraţie. Dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Cum, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, avem $r_k = S - S_k$, de unde $\lim_{k\to\infty} r_k = S - S = 0$.

Definiţia 2.1.6 *Dacă considerăm seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *se numeşte seria* ***sumă*** *seria numerică*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

şi ***serie produs cu scalarul*** $\lambda \in \mathbb{R}$ *seria numerică*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_n + \ldots.$$

Teorema 2.1.1 *Dacă seria* $\sum a_n$ *converge, având suma* A*, iar seria* $\sum b_n$ *converge, având suma* B *atunci seria* $\sum(a_n + b_n)$ *converge şi are suma* $A + B$*.*

Demonstraţie. Fie $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ şi $B = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Cum $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, iar $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, rezultă că $A_n + B_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ converge la $A + B$, ceea ce ne permite să scriem $\sum(a_n + b_n) = A + B$.

Teorema 2.1.2 *Dacă* $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$*,atunci seriile* $\sum a_n$ *şi* $\sum \lambda a_n$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. Fie $S_n = \sum_{h=1}^{n} a_k$. Dacă $\sum a_n$ converge, atunci $\lim_{n\to\infty} \sum_{h=1}^{n} a_k = S$, ceea ce implică şi $\lim_{n\to\infty} \lambda S_n = \lambda S$. Cum $\lambda a_1 + \ldots + \lambda a_n = T_n = \lambda S_n$, rezultă că şi seria $\sum \lambda a_n$

este convergentă şi are suma λS. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci şirul (S_n) diverge, ceea ce atrage după sine că şirul $T_n = \lambda S_n$ diverge, adică seria $\sum \lambda a_n$ este divergentă. Reciproc rezultă prin înlocuirea lui λ cu $1/\lambda$.

Teorema 2.1.3 *Dacă într-o serie convergentă se asociază termenii seriei în grupe cu un număr finit de elemente, păstrând ordinea, atunci se obţine tot o serie covnergentă cu aceeaşi sumă.*

Demonstraţie. Fie seria $\sum a_n$ convergentă, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ şi $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Să aranjăm termenii seriei $\sum a_n$ în grupe cu un număr finit de termeni astfel

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} a_{n_2+2} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots + \tag{2.2}$$

$$+(a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \ldots + a_{n_k}) + \ldots$$

păstrând ordinea termenilor. Notând $b_i = a_{n_{i-1}+1} + a_{n_{n-1}+2} + \ldots + a_{n_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ şi $T_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$, $k = 1, 2, \ldots$ scriem $T_k = S_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ ceea ce ne arată că (T_k) este un subşir al şirului (S_n). Deoarece $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, deducem că $\lim_{k\to\infty} T_k = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} = S$, ceea ce ne arată că seria (2.2) este convergentă, iar suma ei este S.

Observaţia 2.1.5 *Reciproca teoremei nu are loc, adică dacă într-o serie $\sum a_n$ convergentă în care termenii sunt grupe cu un număr finit de termeni, atunci prin desfăşurarea grupelor (înlăturarea parantezelor), păstrând ordinea termenilor, se poate obţine o serie divergentă.*

De exemplu, seria

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots \tag{2.3}$$

este convergentă, în imp ce seria

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \qquad (2.4)$$

este divergentă.

Observaţia 2.1.6 *Într-o serie divergentă se pot aranja termenii în grupe cu un număr finit de elemente, păstrând ordinea, aşa încât seria obţinută să fie convergentă. Astfel, seria (2.4) este divergentă iar seria (2.3) este convergentă.*

2.2 Criterii de convergenţă pentru serii numerice cu termeni oarecare

Dacă în seria $\sum a_n$ nu facem nici o precizare asupra semnului termenilor, atunci se mai spune că avem o serie numerică cu termeni oarecare. În acest paragraf ne interesează să găsim criterii prin care să putem preciza convergenţa unei serii de numere reale. Este important să cunoaştem convergenţa unei serii deoarece, cunoscând acest fapt, chiar dacă nu-i cunoaştem suma, o putem evalua luând sume parţiale cu un număr cât mai mare de termeni.

Teorema 2.2.1 *(Criteriul lui Cauchy). Seria $\sum a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε astfel încât, pentru orice n natural, $n > n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$ să avem*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Demonstraţie. Fie (S_n) şirul sumelor parţiale, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Cum seria a_n este convergentă dacă şi numai dacă şirul (S_n) este convergent, iar şirul (S_n) este covnergent dacă şi numai dacă este şir fundamental , rezultă că serie $\sum a_n$

este convergentă dacă si numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât, petru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$ să avem $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. De aici, prin înlocuirea corespunzătoare a sumelor S_{n+p} şi S_n, obţinem valabilitatea criteriului lui Cauchy pentru serii numerice.

Teorema 2.2.2 *(***Criteriul Dirichlet***). Seria* $\sum a_n b_n$ *este convergentă dacă şirul sumelor parţiale al seriei* $\sum a_n$ *este mărginit, iar şirul* (b_n) *este descrescător şi convergent la* 0.

Demonstraţie. Fie (S_n) şirul sumelor parţiale al seriei $\sum a_n$, fiind mărginit, există un $M > 0$ aşa încât $|S_n| \leq M$, pentru orice n natural.

Utilizând faptul că şirul (b_n) este descrescător putem scrie succesiv:

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + a_{n+3}b_{n+3} + \ldots + a_{n+p}b_{n+p}| = \quad (2.5)$$

$$= |b_{n+1}(S_{n+1}-S_n)+b_{n+2}(S_{n+2}-S_{n+1})+b_{n+3}(S_{n+3}+S_{n+2})+\ldots+$$

$$+b_{n+p}(S_{n+p} + S_{n+p-1})| =$$

$$= |-b_{n+1}S_n + (b_{n+1} - b_{n+2})S_{n+1} + (b_{n+2} - b_{n+3})S_{n+2} + \ldots +$$

$$+(b_{n+p-1} - b_{n+p})S_{n+p-1} + b_{n+p}S_{n+p}| \leq$$

$$\leq |S_n|\;|b_{n+1}| + |b_{n+1} - b_{n+2}|\;|S_{n+1}| + |b_{n+2} - b_{n+2}|\;|S_{n+2}| + \ldots +$$

$$+|b_{n+p-1} - b_{n+p}|\;S_{n+p-1}| + |b_{n+p}|\;S_{n+p}| \leq$$

$$\leq M(b_{n+1}+b_{n+1}-b_{n+2}+b_{n+2}-b_{n+3}+\ldots+b_{n+p-1}-b_{n+p}+b_{n+p}) =$$

$$= 2Mb_{n+1}$$

Deoarece $b_{n+1} \to 0$ pentru $n \to \infty$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, să avem $b_{n+1} < \varepsilon/2M$. Acum, din (2.5) rezultă

$$|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \ldots + a_{n+p}b_{n+p}| < \varepsilon$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$. Prin urmare, sunt îndeplinite condiţiile din criteriul lui Cauchy (Teorema 2.2.1), rezultând că seria $\sum a_n b_n$ este convergentă.

Exemplul 2.2.1. Fie seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, unde $x \in \mathbb{R}$. Se observă că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ are şirul sumelor parţiale $(S_n(x))$ mărginit. Într-adevăr dacă $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, înmulţind $S_n(x)$ cu $2\sin\frac{x}{2}$, găsim

$$S_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

de unde

$$|S_n(x)| = |\sin x + \ldots + \sin nx| = \frac{\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $S_n(x) = 0$. Deci, în ambele situaţii există $M > 0$ aşa încât $|S_n(x)| \leq M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pe de altă parte, şirul $b_n = 1/\sqrt{n}$ tinde descrescător la 0. Prin urmare, fiind îndeplinite condiţiile criteriului lui Dirichlet rezultă că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.2.3 *(***Criteriul lui Abel***). Dacă seria* $\sum a_n$ *este convergentă şi* (b_n) *este un şir monoton şi mărginit, atunci seria* $\sum a_n b_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Cum şirul (b_n) este monoton şi mărginit rezultă că el este convergent; fie $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Fără a restrânge generalitatea demonstraţiei putem considera că şirul (b_n) este crescător. Atunci şirul $(b - b_n)$ va fi un şir descrescător şi cu limita 0. Din faptul că serie $\sum a_n$ este convergentă rezultă că şirul sumelor parţiale este mărginit. Aplicând criteriul lui Dirichlet, deducem că serie $\sum a_n(b - b_n)$ este convergentă. Dar $\sum a_n$ fiind convergentă rezultă că şi $\sum ba_n$ este convergentă. Acum, utilizând teorema 2.1.1, obţinem că seria $\sum a_nb_n$ este convergentă deoarece $a_nb_n = -a_n(b - b_n) + ba_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Cu această teorema este demonstrată.

Exemplul 2.2.2. Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Observăm că seria $\sum \frac{1}{2^n}$ este convergentă, fiind serie geometrică cu raţia $\frac{1}{2} \in (-1, 1)$, iar şirul $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, este strict crescător şi mărginit (Exemplul 1.1.1). Cum sunt îndeplinite condiţiile criteriului lui Abel, deducem că seria dată este convergentă.

Definiţia 2.2.1 *O serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte* **serie alternantă** *(sau* **alternată***) dacă* $a_na_{n+1} < 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *adică dacă termenii săi alternează ca semn.*

Este evident că orice serie alternantă poate fi scrisă în una din formele: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *sau* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, *unde* $a_n \geq 0$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplul 2.2.3. Seriile $\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1} = -1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\dots$ sunt serii alternate.

Teorema 2.2.4 (**Criteriul lui Leibniz**). *Dacă în serie alternantă* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *şirul* (a_n) *este descrescător şi convergent la zero, atunci seria este convergentă.*

Demonstraţie. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ are şirul sumelor parţiale mărginit ($|S_n| \le 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$), iar şirul (a_n) este descrescător şi convergent la 0 rezultă, conform criteriului lui Dirichlet că seria alternantă este convergentă.

Exemplul 2.2.4. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ este convergentă deoarece sunt îndeplinite condiţiile criteriului lui Leibniz.

Corolarul 2.2.1 *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *îndeplineşte condiţiile din Criteriul lui Leibniz (Teorema 2.2.4) şi* S *este suma ei, atunci*

$$|S - S_n| \le a_{n+1}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ *sumă parţială de rang* n.

Demonstraţie. Într-adevăr, cum $a_k - a_{k+1} \ge 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$|S - S_n| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k\right| =$$

$$|(-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} + \ldots| =$$
$$= |(-1)^n [(a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \ldots]| =$$
$$= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \ldots =$$
$$= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \ldots \leq a_{n+1}.$$

Exemplul 2.2.5. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ (numită ***seria armonică alternantă***) este convergentă deoarece şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$ este descrescător şi convergent la 0. Fie (S_n) şirul sumelor parţiale al seriei. Cum şirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n, \ n \in \mathbb{N}^*,$$

este convergent la γ–constanta lui Euler (vezi Problema 8 din 1.1), avem

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = x_{2n+1} + \ln(2n+1) - (\gamma_n + \ln n) =$$

$$= x_{2n+1} - x_n + \ln \frac{2n+1}{n},$$

de unde

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2.$$

Deoarece şirul (S_n) este convergent şi subşirul (S_{2n+1}) are limita $\ln 2$, rezultă că şi şirul (S_n) are limita $S = \ln 2$. Atunci, pe baza Corolarului 2.2.1, putem scrie

$$|S_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1}, \ n \in \mathbb{N}^*,$$

adică eroarea absolută prin care şirul (S_n) aproximează pe $\ln 2$ nu depăşeşte pe $1/(n+1)$.

2.3 Serii absolut convergente. Serii semiconvergente

Am văzut în Exemplul 2.2.5. că seria armonică alternantă $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ este convergentă în timp ce seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, adică seria armonică, este divergentă (Exemplul 2.1.1). Acest exemplu ne permite să considerăm definiţiile de mai jos, care ne permit o clasificare a seriilor convergente.

Definiţia 2.3.1 *Seria $\sum a_n$ se numeşte* ***absolut convergentă****, dacă seria $\sum |a_n|$ este convergentă.*

Exemplul 2.3.1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ este absolut convergentă.

Propoziţia 2.3.1 *Dacă seria $\sum a_n$ este absolut convergentă, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă.*

Demonstraţie. Deoarece $\sum a_n$ este absolut convergentă rezultă că $\sum |a_n|$ este convergentă. Atunci, conform cu **criteriul lui Cauchy**, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ aşa încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$, să avem

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Cum

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|,$$

obţinem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$, are loc

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon,$$

adică seria $\sum a_n$ satisface criteriul lui Cauchy, ceea ce ne arată că ea este o serie convergentă.

Observaţia 2.3.1 *Reciproca Propoziţiei 2.3.1 nu are loc. Există serii convergente pentru care seria valorilor absolute este divergentă; de exemplu, seria armonică alternantă.*

Definiţia 2.3.2 *Seria $\sum a_n$ se numeşte **serie semiconvergentă** sau **condiţionat convergentă** dacă seria $\sum a_n$ este convergentă dar seria $\sum |a_n|$ este divergentă.*

Exemplul 2.3.2. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ este semiconvergentă.

Observaţia 2.3.2 (**Riemann**). *Dacă $\sum a_n$ este o serie semiconvergentă, atunci există o permutare a termenilor săi astfel încât să se obţină: i) o serie convergentă cu suma un număr real dat; ii) o serie divergentă cu suma $+\infty$ sau $-\infty$; iii) o serie divergentă cu şirul sumelor parţiale fără limită (divergent, oscilant) (v. [16]).*

Această observaţie ne avertizează că în seriile semiconvergente trebuie să fim atenţi la schimbarea ordinii termenilor, deoarece putem obţine serii cu naturi diferite.

Definiţia 2.3.3 *Fiind date seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ se numeşte **produs Cauchy** sau **de convoluţie** al celor două serii, serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ în care $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$.*

Exemplul 2.3.3. Pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ produsul de convoluţie cu ea însăşi este seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, unde

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^{n-1} \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}},$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Se observă în exemplul precedent că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ este convergentă, conform criteriului lui Leibniz, însă seria $\sum c_n$ a produsului de convoluţie este divergentă deoarece

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \neq 0$.

Teorema 2.3.1 (**Mertens**). *Dacă două serii sunt convergente şi cel puţin una este absolut convergentă, atunci seria produs Cauchy al celor două serii este convergentă, iar suma sa este egală cu produsul sumelor celor două serii.*

Demonstraţie. Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, cu (A_n) şi (B_n) şirurile corespunzătoare ale sumelor parţiale, iar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ seria produs de convoluţie, cu (C_n) şirul sumelor parţiale. Să presupunem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă. Avem

$$C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \ldots +$$

$$+(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1) =$$
$$= a_1(b_1{+}b_2{+}\ldots{+}b_n){+}a_2(b_1{+}\ldots{+}b_{n-1}){+}\ldots{+}a_{n-1}(b_1{+}b_2){+}a_nb_1 =$$
$$= a_1B_n + a_2B_{n-1} + \ldots + a_{n-1}B_2 + a_nB_1.$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă şi are suma B, şirul $d_n = B_n - B$, $n = 1, 2, \ldots$, este convergent. Acum putem scrie

$$C_n = a_1(d_n + B) + a_2(d_{n-1} + B) + \ldots + a_n(d_1 + B) =$$
$$B(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_1d_n + a_2d_{n-1} = \ldots + a_nd_1 =$$
$$= BA_n + a_1d_n + a_2d_{n-1} + \ldots + a_nd_1,$$

de unde

$$C_n - A_nB = a_1d_n + a_2d_{n-1} + \ldots + a_nd_1. \tag{2.6}$$

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă rezultă că şirul sumelor ei parţiale este mărginit, adică există un $M > 0$ aşa încât

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| < M, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.7}$$

Din faptul că şirul (d_n) este convergent la 0, deducem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_{1\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$ aşa încât, pentru orice $n > n_1$ să avem

$$|d_n| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{2.8}$$

Pe de altă parte, deoarece seria $\sum a_n$ este convergentă avem că $a_n \to 0$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_2 \in \mathbb{N}^*$ aşa încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_2$, să avem

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2(|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_{n_2}|)}.$$

Acum, din (2.6), (2.7) şi (2.8), pentru orice n natural, $n > n_1 + n_2 - 1$, avem

$$|C_n - A_nB| \leq (|a_1|\ |d_n| + |a_2|\ |d_{n-1} + \ldots + |a_{n-n_1}|\ |d_{n_1+1}) +$$
$$+(|a_{n-n_1+1}|\ |d_{n_1}| + \ldots + |a_n|\ |d_1|) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2M}(|a_1| + |a_2| + \ldots ||a_{n-n_1}|) +$$
$$+\frac{\varepsilon}{2(|d_1| + \ldots + |d_{n_1}|)}(|d_{n_1}| + \ldots + |d_1|) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ceea ce ne arată că $\lim\limits_{n\to\infty}(C_n - A_nB) = 0$. De aici, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_nB = A \cdot B$, ceea ce trebuia demonstrat.

2.4 Serii cu termeni pozitivi

În paragraful precedent am văzut că o serie $\sum a_n$ absolut convergentă este şi convergentă. Cum în seria $\sum |a_n|$ avem $|a_n| \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, rezultă că prezintă interes să obţinem criterii de convergenţă pentru serii $\sum a_n$, cu $a_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Definiţia 2.4.1 *O serie* $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ *cu* $a_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *se numeşte serie cu termeni pozitivi.*

Teorema 2.4.1 (Criteriul mărginirii şirului sumelor parţiale). *Seria cu termeni pozitivi* $\sum a_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale este mărginit.*

Demonstraţie. Dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, atunci şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent şi, prin urmare, mărginit.

Reciproc dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este mărginit, observând că el este strict crescător ($S_{n+1} - S_n = a_{n+1} > 0$, $n = 1, 2, \ldots$), deducem că el este convergent, ceea ce ne demonstrează că seria $\sum a_n$ este convergentă.

Criteriul mărginirii şirului sumelor parţiale ne va permite să obţinem condiţii suficiente pentru convergenţa seriilor cu termeni pozitivi.

Teorema 2.4.2 (Criteriul de comparaţie a termenilor generali). *Fie seriile cu termenii pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *astfel ca* $a_n \leq b_n$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$. *i) Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă; ii) Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Fie $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ şi $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Din $a_n \leq b_n$ rezultă

$$A_n \leq B_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^* \tag{2.9}$$

i) Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci şirul (B_n) este mărginit şi din (2.9) deducem că şirul (A_n) este mărginit, deci, conform criteriului mărginirii şirului sumelor parţiale, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci şirul (A_n) este divergent şi crescător; deci, şirul (B_n) este divergent şi crescător. Prin urmare, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Observaţia 2.4.1 *Criteriul de comparaţie al termenilor generali se păstrează şi dacă $a_n \le b_n$ pentru orice $n > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Exemplul 2.4.1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ se numeşte **seria armonică generalizată**.

Pentru $\alpha = 1$ seria este divergentă (Exemplul 2.1.4.).

Dacă $\alpha < 1$, atunci $1/n^\alpha > 1/n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, conform criteriului de comparaţie a termenilor generali obţinem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă pentru $\alpha < 1$.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$. Avem

$$1 \le 1$$

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \le 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

$$\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} < 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} < \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2$$

$$\frac{1}{(2^{t-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{t-1}+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^t 1)^\alpha} < 2 \cdot \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}^{\alpha}\right)^{t-1},$$

de unde

$$S_{2^t-1} = \sum_{k=1}^{2^t-1} \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=1}^{t} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{k-1}} = \frac{1 - \frac{1}{(2^{\alpha-1})^t}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{2^\alpha - 1}{2^{\alpha-1} - 1},$$

adică subşirul (S_2t_{-1}) al şirului sumelor parţiale (S_n) este mărginit.

Cum şirul (S_n) este crescător şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există un $t \in \mathbb{N}$ aşa încât $n < 2^t - 1$, deducem că şirul (S_n) este mărginit. Prin urmare, conform criteriului mărginirii sumelor parţiale rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$.

Este bine de reţinut că seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Exemplul 2.4.2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ este convergentă deoarece

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}},$$

iar seria $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă fiind o serie armonică generalizată cu $\alpha = 3/2 > 1$.

Teorema 2.4.3 (Criteriul de comparaţie al limitei raportului termenilor generali). *Fie seriile* $\sum a_n$ *şi* $\sum b_n$ *cu termenii pozitivi.*

i) Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$ *şi* $\lambda \in (0, \infty)$, *atunci cele două serii au aceeaşi natură.*

ii) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, *atunci dacă* $\sum b_n$ *este convergentă rezultă că şi* $\sum a_n$ *este convergentă, iar dacă* $\sum a_n$ *este divergentă rezultă că şi* $\sum b_n$ *este divergentă.*

iii) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$, *atunci dacă* $\sum a_n$ *este convergentă rezultă că şi* $\sum b_n$ *este convergentă, iar dacă* $\sum b_n$ *este divergentă rezultă că şi* $\sum a_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. i) Din $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$ rezultă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, aşa încât, pentru orice $n > n_\varepsilon$, să avem $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - \lambda\right| < \varepsilon$, de unde

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon.$$

De aici, luând $\varepsilon = \lambda/2$, găsim

$$\frac{\lambda}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2}\lambda \cdot b_n, \tag{2.10}$$

pentru orice $n > n_{\lambda/2}$.

Din (2.10), aplicând teorema 2.4.2, rezultă afirmaţia de la i).

ii) Dacă $\lambda = 0$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât să avem $-\varepsilon < a_n/b_n < \varepsilon$, pentru orice $n > n_0$, de unde obţinem

$$a_n < \varepsilon b_n, \qquad \text{pentru orice } n > n_0. \tag{2.11}$$

Aplicând criteriul de comparaţie a termenilor generali, din (2.11) rezultă afirmaţia de la ii).

iii) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = \infty$, atunci rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n/a_n = 0$, de unde, conform cu ii) al teoremei, obţinem afirmaţiile de la iii).

Exemplul 2.4.3. Seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)$ este divergentă deoarece, considerând seria $\sum \frac{1}{n}$, cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \ln 2 > 0,$$

rezultă conform teoremei 2.4.3i), că seria dată are aceeaşi natură ca şi seria armonică $\sum \frac{1}{n}$, adică divergentă.

Teorema 2.4.4 (Criteriul raportului – D′Alembert). *Fie seria numerică* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *cu termeni pozitivi. Dacă* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda < 1$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$*, atunci seria este convergentă, iar dacă* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$*, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$*, atunci seria este divergentă.*

Demonstraţie. Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$. atunci putem scrie

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_2}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \ldots q}_{(n-1) \text{ ori}} = a_1 q^{n-1},$$

de unde $a_n \leq a_1 q^{n-1}$. Cum $q < 1$, rezultă că seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ este convergentă, iar de aici, folosind criteriul de comparaţie, a termenilor generali, deducem că seria $\sum a_n$ este convergentă, în acest caz.

Dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, rezultă că şirul de numere pozitive (a_n) este crescător, deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Utilizând Corolarul 2.1.1, rezultă că seria $\sum a_n$ este divergentă.

Corolarul 2.4.1 *Fie seria* $\sum a_n$ *cu termeni pozitivi. Dacă exită* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$*, atunci:*

i) dacă $l < 1$, seria $\sum a_n$ este covnergentă;

ii) dacă $l > 1$, seria $\sum a_n$ este divergentă.

Demonstraţie. i) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$, atunci pentru orice ε, cu $0 < \varepsilon < 1 - l$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca, pentru orice $n > \varepsilon$, să avem

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon,$$

de unde

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon < 1, \qquad \text{pentru orice } n > n_\varepsilon.$$

Acum, folosind prima parte a Teoremei 2.4.4, obţinem că seria $\sum a_n$ este convergentă.

ii) În situaţia $l > 1$, procedând în mod analog, găsim

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon > 1, \qquad \text{pentru } n > n_\varepsilon$$

De aici, utilizând a doua parte a Teoremei 2.4.4, deducem că seria $\sum a_n$ este divergentă.

Observaţia 2.4.2 *Corolarul 2.4.1 nu este aplicabil în situaţia $l = 1$. În acest caz, trebuie apelat la alte metode pentru a preciza natura seriei de studiat.*

Exemplul 2.4.4. Seria de numere reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n},$$

este cu termeni pozitivi. Vom studia natura ei utilizând criteriul raportului cu limită. Avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n\cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e}$$

Cum $3/e > 1$, rezultă că seria este divergentă.

Teorema 2.4.5 (Criteriul rădăcinii – Cauchy). *Fie seria $\sum a_n$ cu termeni pozitivi. Dacă $\sqrt[n]{a_n} \le \lambda < 1$. pentru $n \ge 1$, atunci seria este convergentă, iar dacă $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, pentru $n \ge 1$, atunci seria este divergentă.*

Demonstraţie. Dacă $\sqrt[n]{a_n} \le \lambda < 1$, atunci avem

$$a_n = (\sqrt[n]{a_n})^n \le \lambda^n, \quad \text{pentru orice } n \ge 1.$$

Cum seria geometrică $\sum \lambda^n$ este convergentă deoarece $\lambda < 1$, conform criteriului de comparaţie a termenilor generali, rezultă că şi seria $\sum a_n$ este convergentă.

Dacă $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, atunci $a_n \ge 1$, deci $\lim_{n\to\infty} \ne 0$ şi deci, pe baza Corolarului 2.1.1, rezultă că seria $\sum a_n$ este divergentă.

Corolarul 2.4.2 (Criteriul rădăcinii cu limită). *Fie seria $\sum a_n$ cu termeni pozitivi. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, atunci seria este convergentă pentru $l < 1$ şi este divergentă pentru $l > 1$.*

Demonstraţie. Dacă $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$, atunci pentru orice ε, cu $0 < \varepsilon < 1 - l$, există un număr natural n_ε, aşa încât

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon, \quad \text{pentru } n > n_\varepsilon,$$

de unde

$$\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon < 1, \quad \text{pentru } n > n_\varepsilon,$$

adică

$$a_n < (l + \varepsilon)^n, \quad \text{pentru } n > n_\varepsilon.$$

Cum seria geometrică $\sum (l+\varepsilon)^n$ este convergentă, conform criteriului de comparaţie a termenilor generali, rezultă că seria $\sum a_n$ este convergentă.

Dacă $l > 1$, procedând în mod analog, găsim

$$a_n > (l-\varepsilon)^n, \text{ cu } l-\varepsilon > 1, \quad \text{pentru } n > n_\varepsilon,$$

de unde obţinem că seria $\sum a_n$ este divergentă.

Exemplul 2.4.5. Seria numerică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2a \cdot n + 1}{n+1}\right)^n, \text{ cu } a > 0,$$

este cu termeni pozitivi.

Utilizând criteriul rădăcinii cu limită, avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2a \cdot n + 1}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a \cdot n + 1}{n+1} = 2a.$$

Dacă $2a < 1$, adică $a < 1/2$, atunci seria numerică dată este convergentă, iar dacă $2a > 1$, adică $a > 1/2$, atunci seria dată este divergentă.

Dacă $a = 1/2$ atunci termenul general al seriei este 1, ceea ce implică că seria este divergentă.

Teorema 2.4.6 (Criteriul Raabe–Duhamel cu limită). *Fie seria* $\sum a_n$ *cu termeni pozitivi. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l,$$

atunci seria este convergentă când $l > 1$ *şi este divergentă când* $l < 1$.

Demonstraţie. Dacă $l > 1$, atunci pentru orice $\varepsilon \in (0, l-1)$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > l - \varepsilon, \quad \text{pentru } n > n_\varepsilon,$$

de unde

$$(l-\varepsilon)_{a_{n+1}} < na_n - na_{n+1}, \quad \text{pentru } n > n_\varepsilon. \tag{2.12}$$

Fără a restrânge generalitatea, putem considera că (2.12) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dând succesiv valorile $1, 2, \ldots, n-1$ în (2.12) obţinem

$$(l-\varepsilon)a_2 < a_1 - a_2$$

$$(l-\varepsilon)a_3 < 2a_2 - 3a_3$$

$$\vdots$$

$$(l-\varepsilon)a_n < (n-1)a_{n-1} - (n-1)a_n,$$

care adunate membru cu membru conduc la

$$\begin{gathered}(l-\varepsilon)(a_2 + a_3 + \ldots + a_n) < \\ < a_1 + a - 2 + \ldots + a_{n-1} - (n-1)a_n.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Punând $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, din (2.13) obţinem

$$(l-\varepsilon)(S_n - a_1) < S_n - na_n < S_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde găsim

$$S_n < \frac{a_1(l-\varepsilon)}{l-\varepsilon-1}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

ceea ce ne arată că şirul sumelor parţiale este mărginit. Prin urmare conform cu criteriul mărginirii şirului sumelor parţiale, deducem că seria $\sum a_n$ este convergentă.

Dacă $l < 1$, atunci pentru orice $\varepsilon \in (0, 1-l)$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < l + \varepsilon < 1, \quad \text{pentru orice } n > n_\varepsilon,$$

de unde

$$na_n - na_{n+1} < a_{n+1}, \quad n > n_\varepsilon$$

adică

$$na_n < (n+1)a_{n+1}, \quad n > n_\varepsilon. \tag{2.14}$$

Fără a micşora generalitatea, putem presupune că (2.14) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Luând succesiv în (2.14) pentru n valorile $1, 2, \dots, n-1$, obţinem

$$a_1 < 2a_2, 2a_2 < 3a_3, \dots, (n-1)a_{n-1} < na_n,$$

care înmulţite membru cu membru conduc la $a_1 < na_n$, de unde

$$a_n > \frac{1}{n}a_1.$$

Cum seria armonică $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă, conform criteriului de comparaţie a termenilor generali, deducem că şi seria a_n este divergentă.

Exemplul 2.4.6. Fie seria numerică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Să cercetăm natura acestei serii de termeni pozitivi. Notând cu a_n termenul general al seriei, avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \cdot \frac{1}{2n+3} \Big/ \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{2n+1} =$$

$$= \frac{2n+2}{2n+3}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, rezultă că nu putem preciza natura seriei cu ajutorul criteriului raportului. Aplicăm criteriul Raabe–Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{2n+3}{2n+2} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1,$$

de unde rezultă că seria dată este divergentă.

2.5 Problemă economică. Fluxul de venit

În problemele de capitalizare se pune problema: ce sumă trebuie investită ca după x ani să se obţină o sumă egală cu a, dacă se cunoaşte dobânda $r\%$ şi frecvenţa capitalizării ei.

Să notăm cu S suma investită (ce trebuie aflată). Ea se numeşte valoarea **prezentă** şi **scontată** a sumei a, disponibilă peste x ani.

Dacă dobânda $r\%$ se capitalizează o dată pe an, atunci din aplicaţia economică din 1.1, rezultă că suma disponibilă peste x ani este $S(1+r)^x$. Atunci, din

$$S(1+r)^x = a,$$

rezultă

$$S = \frac{a}{(1+r)^x}.$$

Dacă dobânda s-ar capitaliza de n ori pe an, cu $r\%$, atunci

$$S = \frac{a}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nx}}.$$

În fine, dacă, dobânda s-ar adăuga continuu, cu $r\%$, atunci

$$S = ae^{-rx}.$$

Parametrii de care depinde S sunt r şi n, care reprezintă dobânda şi frecvenţa capitalizării. Se observă că suma prezentă S este cu atât mai mică cu cât dobânda este mai mare şi cu cât se capitalizează mai des.

Problema pusă se poate extinde astfel: dacă dorim să variem veniturile de la an la an cu valorile $a_0, a_1, \ldots, a_m$, adăugându-se în fiecare an dobânda $r\%$,a tunci valoarea variaţiei venitului, numită **flux de venituri**, ar fi

$$a_0 + \frac{a_1}{1+r} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(1+r)^m}. \tag{2.15}$$

Suma (2.15) se numeşte **valoarea de capital** a fluxului de venit. Ea este suma S ce trebuie investită pentru a obţine veniturile $a_0, a_1, \ldots, a_m$ în anii următori.

Se observă că dacă numărul anilor de capitalizare ar creşte indefinit, atnci suma (2.15) reprezintă o serie de tip geometric.

Să considerăm acum un flux de venit în valoare a care începe în anul următor şi continuă timp de n ani cu dobânda anuală $r\%$. Atunci valoarea prezentă a fluxului va fi

$$S = \frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{a}{(1+r)^n} =$$

$$\frac{a}{1+r} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{a}{r}\left[1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right].$$

Dacă fluxul de venit continuă indefinit, atunci valoarea prezentă se obţine prin trecere la limită, făcând $n \to \infty$, adică suma seriei geometrice convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a/(1+r)^n$. Prin urmare, valoarea prezentă S a sumei a, care va fi capitalizată la nesfârşit, cu rata dobânzii $r\%$ anual, este a/r.

2.6 Probleme

1. Arătaţi că mulţimea seriilor de numere înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu un scalar este un spaţiu vectorial. Submulţimea seriilor convergente este un subspaţiu vectorial al mulţimii seriilor?

2. Cercetaţi natura şi eventual precizaţi suma pentru seriile:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+4n+3}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+(-4)^n}{5^n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{5^n}$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$; i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cdot 2^n}{(n+2)!}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(n+p)!}$, $p \in \mathbb{N}^*$ fixat.

3. Precizaţi natura seriilor

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^3 n}{n^3}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n^2+1)n!}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)!}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3^{3n}}{(3n)!}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$.

4. Stabiliţi natura seriilor cu termeni pozitivi:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+5n^2+3}{n^5+4n^3+n^2+1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{n^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{2^n+3^n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{(a+b)^n}$, $a > 0$, $b > 0$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3^{\frac{1}{n^2}} - 1)(5^{\frac{1}{n}} - 1)$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{n^2}$; g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{\sqrt[3]{n^7 + 3n^5 + n + 1}}$;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}$; i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n^2}$; j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+1}{n}\right)^{n^2}$, $a > 0$;

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$, $a > 0$; l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{n}$;

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$, $a > 0$; n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}$;

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{(n+1)^{k+1}}$, $k > 0$;

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}$; q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$;

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$; s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+\alpha}}$, $\alpha > 0$;

t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$.

5. Fie seriile $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cu termeni pozitivi, astfel ca $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că:

i) dacă $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

ii) dacă $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă (criteriul de comparaţie a rapoartelor).

6. Arătaţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ este convergentă şi are suma numărul e. Utilizând rezultatul precedent, demonstraţi că numărul e este iraţional.

7. Precizaţi natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}, \qquad \text{unde } a > 0.$$

8. Demosntraţie că produsul Cauchy (de convoluţie) cu două serii absolut convergente este o serie absolut convergentă cu suma egală cu produsul sumelor celor două serii.

9. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termen pozitivi convergentă. Arătaţi că seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_{n+1} a_{n+2}} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{-1} + a_{n+1}^{-1} + a_{n+2}^{-1})^{-1}$$

sunt convergente.

10. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi divergentă şi $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Arătaţi că:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$ este divergentă: b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ este divergentă;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ este convergentă.

11. Precizaţi valoarea actuală a venitului actual de 1.000.000 lei, care continuă la nesfârşit dacă rata dobânzii este de 40% anual.

2.7 Test de verificare a cunoştinţelor nr. 2

1. Definiţi următoarele noţiuni:
   a) Serie numerică;
   b) Serie numerică convergentă;
   c) Suma unei serii numerice;
   d) Serie numerică semiconvergentă.
2. Enunţaţi:
   a) Criteriul lui d'Alembert (raportului) pentru serii cu termeni pozitivi;
   b) Criteriul lui Cauchy (radicalului) pentru serii cu termeni pozitivi;
   c) Criteriul lui Raabe - Duhamel pentru serii cu termeni pozitivi;
   d) Criteriul lui Leibniz pentru serii alternante;
   e) Primul criteriu de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi.
3. Aflaţi suma seriei $\sum_{n\geq 1} u_n$ cu $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
4. Aflaţi suma seriei $\sum_{n\geq 2} u_n$ cu $u_n = \dfrac{n^2+n-3}{n!}$.
5. cercetaţi natura seriilor $\sum_{n\geq 1} u_n$ cu:
   a) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$,
   b) $u_n = \dfrac{a^n \cdot n!}{n^n}$ cu $a > 0$, $a \neq e$,

c) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

6. Să se studieze natura seriilor $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ cu:

a) $u_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n$,

b) $u_n = \left[\sqrt{(n+1)(n+a)} - n\right]^n$ cu $a > 0$,

c) $u_n = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}$,

d) $u_n = \left(\dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^3} - \dfrac{n}{4}\right)^n$.

7. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, unde

$$u_n = \frac{n!}{(\lambda+1)(\lambda+2)...(\lambda+n)} \quad \text{cu} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

8. Să se studieze natura seriilor

a) $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ cu $u_n = \left[\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot (2n)}\right]^a \cdot \dfrac{1}{n^n}$ cu $a \in \mathbb{R}^3$.

b) $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, cu $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4+1}}$, folosind primul criteriu de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi.

c) $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ cu:

i) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \leq 1$,

ii) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \geq 2$.

folosind criteriul general al lui Cauchy.

9. Să se studieze absolut convergenţa şi semiconvergenţa seriei numerice $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ cu:

   a) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$,

   b) $u_n = \dfrac{\sin na}{2^n}$, $a \in \mathbb{R}$.

10. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ cu:

    a) $u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{3^n}$,

    b) $u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n^2-1}$.

Capitolul 3

Funcţii între spaţii metrice

" A înţelege înseamnă a te apropia"

(Victor Hugo)

Multe din problemele practice conduc la modele matematice ce utilizează aplicaţii între două spaţii metrice, mai ales între spaţiile $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}$.

În acest capitol vom prezenta, în esenţă, noţiunile de limită şi de continuitate pentru funcţiile între spaţii metrice.

3.1 Vecinătatea unui punct

Noţiunea de vecinătate a unui punct într-un spaţiu metric este fundamentală în setarea noţiunilor de limită şi de continuitate.

Definiţia 3.1.1 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi a un punct arbitrar din X şi r un număr real pozitiv.*

Mulţimea

$$S(a, r) = \{x \in X | d(a, x) < r\}$$

se numeşte **sferă (bilă) deschisă** *sau de centru a şi rază r, iar mulţimea*

$$\overline{S}(a,r) = \{x \in X | d(a,x) \leq r\}$$

se numeşte **sferă (bilă) închisă** *de centru a şi rază r.*

Exemplul 3.1.1. Pentru $X = \mathbb{R}$ şi $d(x,y) = |x-y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. sfera deschisă

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}\perp : |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$$

este intervalul deschis, centrat în a, iar sfera închisă

$$\overline{S}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}\perp : \ |x-a| \leq r\}$$

este **intervalul închis** $[a-r, a+r]$.

Exemplul 3.1.2. Pentru $X = \mathbb{R}^2$, sfera închisă, şi respectiv deschisă, de centru (a,b) şi de rază r în raport cu metrica euclidiană

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}, \text{ unde } x = (x_1, x_2) \text{ şi}$$

$y = (y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2)$,sunt date, repectiv, în figurile 3.1.1. şi 3.1.2.

Fig.3.1.1. Fig.3.1.2.

Exemplul 3.1.3. Pentru $X = \mathbb{R}^2$ şi $d(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$, dacă $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, sfera deschisă de rază r şi centru $x_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ este trasată în figura 3.1.4., iar sfera închisă de aceeaşi rază şi acelaşi centru este trasată în figura 3.1.3.

Fig.3.1.3. Fig.3.1.4.

Exemplul 3.1.4. Dacă $X = \mathbb{R}^3$ şi $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, atunci sfera deschisă $S(x_0, r)$ coincide cu interiorul sferei cu centrul în $x_0 = (a, b, c)$ şi de rază r, iar sfera închisă $\overline{S(x_0, r)}$ coincide cu mulţimea punctelor din $\mathbb{R}^3$ aflate în interiorul sferei sau pe sfera de rază r şi centru x_0.

Definiţia 3.1.2 *Fie spaţiul metric (X, d) şi x_0 un punct arbitrar din X. Numim* **vecinătate** *a punctului x_0 o mulţime $V(x_0)$ a spaţiului X pentru care există o sferă deschisă centrată în x_0, conţinută în V.*

Altfel spus, $V(x_0)$ este vecinătate a lui x_0 dacă există $r > 0$ aşa încât $S(x_0, r) \subset V(x_0)$.

Propoziţia 3.1.1 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi x_0 un punct arbitrar din X. Sunt valabile următoarele proprietăţi:*

1) dacă $V(x_0)$ este o vecinătate a punctului x_0, atunci orice supramulţime a sa, V, este, de asemenea vecinătate a punctului x_0;

2) dacă $V_1(x_0)$ şi $V_2(x_0)$ sunt două vecinătăţi ale punctului x_0, atunci $V_1(x_0) \cap V_2(x_0)$ este vecinătate a punctului x_0;

3) dacă $V(x_1)$ este o vecinătate a punctului x_0 atunci $x_0 \in V(x_0)$;

4) dacă $V(x_0)$ este o vecinătate a punctului x_0, atunci există o vecinătate $W(x_0)$ a punctului x_0 astfel ca pentru orice $y \in W(x_0)$ mulţimea $V(x_0)$ să fie vecinătate a punctului y.

Demonstraţie. 1) Cum $V(x_0)$ este vecinătate a lui x_0 rezultă că există $r > 0$ aşa încât $S(x_0, r) \subset V(x_0)$. Dar atunci $S(x_0, r) \subset U$, adică U este o vecinătate a lui x_0.
2) Din faptul că $V_1(x_0)$ şi $V_2(x_0)$ sunt vecinătăţi ale lui x_0 rezultă că există $r_1 > 0$ şi $r_2 > 0$, aşa încât $S(x_0, r_1) \subset V_1(x_0)$ şi $S(x_0, r_2) \subset V_2(x_0)$. Considerând $r = \min(r_1, r_2)$ se observă că $S(x_0, r) \subset V_i(x_0)$, $i = 1, 2$; deci $S(x_0, r) \subset V_1(x_0) \cap V_2(x_0)$. Prin urmare, $V_1(x_0) \cap V_2(x_0)$ este o vecinătate a lui x_0.
3) Această proprietate rezultă din definiţia vecinătăţii lui x_0.
4) Cum $V(x_0)$ este vecinătate a lui x_0 rezultă că există $r > 0$ aşa ca $S(x_0, r) \subset V(x_0)$. Considerăm $W(x_0) = S(x_0, r)$. Dacă $y \in W(x_0)$, întrucât $d(y, x_0) < r$, luând r_1 aşa încât $0 < r_1 < r - d(y, x_0)$, avem $S(y, r_1) \subset S(x_0, r) \subset V(x_0)$. Într-adevăr, dacă $z \in S(y, r)$, atunci $d(y, z) < r_1$ şi ţinând seama de alegerea lui r_1, avem $d(z, x_0) \leq d(z, y) + d(y, x_0) < r_1 + d(x_0, y) < r$, ceea ce ne arată că $z \in S(x_0, r)$. Prin urmare, $S(y, r_1) \subset V(x_0)$, adică $V(x_0)$ este vecinătate pentru $y \in W(x_0)$.

Din demonstraţia proprietăţii 4) a Propoziţiei 3.1.1, rezultă:

Corolarul 3.1.1 *Orice sferă deschisă dintr-un spaţiu metric este vecinătate pentru orice punct al său.*

Teorema 3.1.1 (Proprietatea de separaţie Hausdorff). *Dacă a şi b sunt două puncte distincte ale spaţiului metric (X, d),a tunci există o vecinătate $V(a)$ a punctului a şi o vecinătate $U(b)$ a punctului b astfel ca $V(a) \cap U(b) = \emptyset$.*

Demonstraţie. Cum $a \neq b$, rezultă $d(a,b) = k > 0$. Considerăm $V(a) = S\left(a, \dfrac{k}{3}\right)$ şi $U(b) = S\left(b, \dfrac{k}{3}\right)$. Evident că $V(a)$ şi $U(b)$ sunt vecinătăţi respectiv ale punctelor a şi b. Vom arăta că $V(a) \cap U(b) = \Phi$. Presupunem contrariul, adică există $z \in V(a) \cap U(b)$. Atunci avem $d(a,z) < \dfrac{k}{3}$ şi $d(b,y) < \dfrac{k}{3}$. Dar putem scrie $k = d(a,b) \leq d(a,z) + d(z,b) < \dfrac{k}{3} + \dfrac{k}{3} = \dfrac{2k}{3}$, de unde $1 < \dfrac{2}{3}$, ceea ce evident este absurd. În concluzie, $V(a) \cap U(b) = \Phi$.

Definiţia 3.1.3 *O submulţime D a spaţiului metric (X,d) se numeşte* **mulţime deschisă** *în X fie dacă $D = \Phi$, fie dacă D este o vecinătate pentru orice punct al său, adică dacă pentru orice $x \in D$ există $r > 0$ astfel ca $S(x,r) \subset D$.*

Exemplu 3.1.5. Orice sferă deschisă $S(x_0, r)$ dintr-un spaţiu metric este o mulţime deschisă. Valabilitatea acestei afirmaţii rezultă din Corolarul 3.1.1. În particular, dacă luăm $X = \mathbb{R}$ cu metrica euclidiană, atunci orice interval de forma $(x_0 - r, x_0 + r)$, cu $r > 0$, este o mulţime deschisă.

Exemplu 3.1.6. În $X = \mathbb{R}$ cu metrica euclidiană, orice interval de forma (a,b), $a < b$, sau $(a, +\infty)$ sau $(-\infty, b)$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, este o mulţime deschisă.

Exemplul 3.1.7. Mulţimile $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2 < x < 4, -3 < y < 2\}$ şi $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \neq 4\}$ sunt deschise.

Exemplul 3.1.8. Mulţimea $\{x \in \mathbb{R} | 3 < x \leq 4\}$ nu este deschisă într-ucât $(3,4]$ nu este vecinătate pentru 4 (nici o sferă cu centrul în 4 nu este conţinută în $(3,4]$).

Propoziţia 3.1.2 *Fie (X,d) un spaţiu metric. Sunt valabile următoarele afirmaţii:*

1) *Orice reuniune (finită sau infinită) de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;*

2) Intersecţia a doua mulţimi deschise este o mulţime deschisă;

3) X este o mulţime deschisă;

4) Orice mulţime deschisă nevidă se poate reprezenta ca o reuniune de sfere deschise.

Demonstraţie. 1) Fie $(D_i)_{i\in I}$ o familie oarecare de mulţimi deschise ale lui X şi fie $D = \bigcup_{i\in I} D_i$. Dacă $D = \Phi$, atunci D este deschisă pe baza Definiţiei 3.1.3. Dacă $D \neq \Phi$, să considerăm un $x \in D$ arbitrar. Atunci rezultă că există D_{i_0} aşa încât $x \in D_{i_0}$. Cum D_{i_0} este mulţime deschisă rezultă că D_{i_0} este vecinătate pentru x. Dar $D_{i_0} \subset D$ şi atunci în conformitate cu proprietatea 1) din Propoziţia 3.1.1, obţinem că D este vecinătate a punctului x. Deoarece x a fost ales arbitrar rezultă că D este o mulţime deschisă.
2) Fie D_1 şi D_2 două mulţimi deschise şi $D = D_1 \cap D_2$. Dacă $D = \Phi$, atunci proprietatea este evidentă. Dacă $D \neq \Phi$, atunci fie $x \in D$ arbitrar. Atunci $x \in D_1$ şi $x \in D_2$. Cum D_1 şi D_2 sunt deschise, rezultă că D_1 şi D_2 sunt vecinătăţi ale punctului x. Folosim proprietatea 2) din Propoziţia 3.1.1, rezultă că şi D este vecinătate pentru punctul x. Cum x a fost ales arbitrar rezultă că D este o mulţime deschisă.
3) Este evidentă.
4) Fie $D \neq \Phi$ o mulţime deschisă; atunci pentru orice $x \in D$ există $r_x > 0$ aşa încât $S(x_1, r_x) \subset D$. Dar $D = \bigcup_{x\in D}\{x\} \subset \bigcup_{x\in D} S(x, r_x) \subset D$, de unde rezultă $D = \bigcup_{x\in X} S(x, r_x)$, ceea ce trebuie demonstrat.

Corolarul 3.1.2 *Intersecţia unui număr finit de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.*

Justificarea acestui corolar rezultă din afirmaţia 2) de la Propoziţia 3.1.2.

O intersecţie infinită de mulţimi deschise poate să nu mai fie o mulţime deschisă. Se poate vedea acest fapt din exemplul următor.

Exemplul 3.1.9. În spaţiu metric $X = \mathbb{R}$ cu metrica euclidiană mulţimea $D_k = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ este deschisă, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Se observă că $\bigcap_{k=1}^{\infty} D_k = \{0\}$ care nu este o mulţime deschisă deoarece pentru orice $r > 0$, intervalul $(-r, r) \not\subset \{0\}$.

Definiţia 3.1.4 *O submulţime H a spaţiului metric (X, d) se numeşte* **închisă** *dacă complementara $C(X) = X - H$ este deschisă.*

Exemplul 3.1.10. Mulţimile X şi Φ sunt închise deoarece $C(x) = \Phi$ şi $C(\Phi) = X$ sunt deschise.

Exemplul 3.1.11. Orice sferă închisă dintr-un spaţiu metric (X, d) este o mulţime închisă.

Într-adevăr, fie $\overline{S(x_0, r)} = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$ şi fie $y \in C(\overline{S(x_0, r)})$ ales arbitrar. Dacă luăm $0 < r_1 < d(y, x_0) - r$, atunci se observă că $S(y, r_1) \subset C(\overline{S(x_0, r)})$, adică $C(\overline{S(x_0, r)})$ este vecinătate pentru punctul y.

În particular, pentru $X = \mathbb{R}$ intervalul închis $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \subset b$ este o mulţime închisă.

Utilizând Propoziţia 3.1.2 şi formulale lui Morgan rezultă valabilitatea următoarei propoziţii:

Propoziţia 3.1.3 *Dacă (X, d) este un spaţiu metric, atunci:*

1) *Orice intersecţie de mulţimi închise ale lui X este o mulţime închisă;*

2) *Orice reuniune finită de mulţimi închise ale lui X este o mulţime închisă.*

Observaţia 3.1.1 *Un spaţiu metric conţine şi submulţimi care nu sunt nici deschise nici închise. De exemplu, dacă*

$X = \mathbb{R}$ cu metrica euclidiană, atunci un interval de forma $[a, b)$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, nu este nici mulţime deschisă nici închisă. Nu este deschisă deoarece mulţimea $[a, b)$ nu este vecinătate pentru punctul a şi nu este închisă deoarece complementara $C([a, b)) = \mathbb{R} - [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ nu este mulţime deschisă, nefiind vecinătate pentru punctul b.

Definiţia 3.1.5 *Dacă A este o submulţime nevidă a spaţiului metric (X, d), numim* **diametrul** *mulţimii A, notat $\delta(A)$, elementul din $\overline{\mathbb{R}}_+ = (0, \infty) \cup (+\infty)$ definit prin*

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) | x \in A, y \in A\}.$$

Exemplul 3.1.13. Dacă $X = \mathbb{R}^2$ este înzestrat cu metrica euclidiană şi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y < 3\}$, atunci $\delta(A) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$.

Definiţia 3.1.6 *Fie A o submulţime nevidă a spaţiului metric (X, d). Spunem că A este o* **mulţime mărginită** *dacă $\delta(A) < +\infty$. Dacă $\delta(A) = +\infty$, atunci spunem că mulţimea A este* **nemărginită**. *Practic, pentru a arăta că o mulţime A este mărginită este suficient să rătăm că mulţimea $\{d(x, y) | x, y \in A\}$ este majorată.*

Propoziţia 3.1.4 *O mulţime nevidă $A \subset (X, d)$ este mărginită dacă şi numai dacă există o sferă deschisă $S(x_0, r)$. aşa încât $A \subset S(x_0, r)$.*

Demonstraţie. Fie $A \neq \Phi$ şi mărginită. Dacă A conţine un singur punct, atunci proprietatea este evidentă. Să presupunem că A conţine cel puţin două puncte. Considerăm x_0 şi x_1 două puncte arbitrare diferite din A. Fie $r \in \mathbb{R}$, $r > d(x_0, x_1) + \delta(A)$; evident $r > 0$. Pentru sfera $S(x_0, r)$ avem $A \subset S(x_0, r)$ deoarece, pentru orice $y \in A$, avem $d(y, y_0) < \delta(A) < r$.

Reciproc, dacă există o sferă deschisă $S(x_0, r)$ aşa încât $A \subset S(x_0, r)$, atunci $\delta(A) \leq \delta(S(x_0, r)) \leq 2r$, adică A este o mulţime mărginită.

Definiţia 3.1.7 *Fie A o submulţime nevidă a spaţiului metric* (X, d)*. Un punct* $x_0 \in A$ *este numit* **punct interior** *al mulţimii A dacă A este o vecinătate pentru* x_0*, dacă există* $r > 0$ *aşa încât* $S(x_0, r) \subset A$*.*

Definiţia 3.1.8 *Mulţimea tuturor punctelor interioare mulţimii A se numeşte* **interiorul** *lui A şi se notează cu* $\mathring{A}$ *sau int A.*

Exemplul 3.1.14. Fie $X = \mathbb{R}$ spaţiul metric înzestrat cu metrica euclidiană, iar $A_1 = [a, b]$, $A_2 = [a, b)$, $A_3 = (a, b]$, $A_4 = (a, b)$ submulţimi ale lui X. Se observă că: $\mathring{A}_1 = \mathring{A}_2 = \mathring{A}_3 = \mathring{A}_4 = (a, b)$. Punctul a nu este interior lui A_1 deoarece A_1 nu este vecinătate pentru a.

Teorema 3.1.2 *Mulţimea A nevidă din spaţiul metric* (X, d) *este deschisă dacă şi numai dacă* $A = \mathring{A}$*.*

Demonstraţie. Să presupunem că A este deschisă; atunci pentru orice $x \in A$ avem că A este o vecinătate a lui x, adică $x \in \mathring{A}$. Cum totdeauna $\mathring{A} \subset A$, obţinem $A = \mathring{A}$.

Reciproc, dacă $A = \mathring{A}$, atunci orice $x \in A$ este punct interior lui A şi deci A este o vecinătate a lui x, ceea ce ne arată că A este deschisă.

Definiţia 3.1.9 *Fie A o submulţime nevidă a spaţiului metric* (X, d)*. Un punct interior complementarei lui A se numeşte* **punct exterior** *mulţimii A, iar int* $C(A)$ *se numeşte* **exteriorul** *lui A, notat prin Ext A.*

Definiţia 3.1.10 *Fie A o submulţime a spaţiului metric* (X, d) *un element* $x_0 \in X$ *se numeşte* **punct aderent** *mulţimii A dacă pentru orice vecinătate* $V(x_0)$ *a lui* x_0 *avem* $V \cap A \neq \Phi$*.*

Definiţia 3.1.11 *Dacă* $A \subset (X, d)$*, mulţimea tuturor punctelor aderente mulţimii se numeşte* **aderenţa** *sau închiderea mulţimii A, notată cu* $\overline{A}$*.*

Exemplul 3.1.15. Orice punct al mulţimii A din Definiţia 3.1.10 este punct aderent al mulţimii A. Evident că avem $A \subseteq \overline{A}$.

Exemplul 3.1.16. Pentru mulţimea $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, punctele a, b sunt puncte aderente deoarece orice vecinătate a lor are puncte comune cu A. Avem $\overline{A} = [a, b]$.

Teorema 3.1.3 *Mulţimea A din spaţiul metric (X, d) este închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$.*

Demonstraţie. Să admitem că A este o mulţime închisă. Atunci conform Definiţiei 3.1.4, deducem că mulţimea $C(A)$ este deschisă. Cum $A \subseteq \overline{A}$ trebuie să arătăm că $\overline{A} \subseteq A$. Dar $\overline{A} \subseteq A$ este echivalent cu $C(A) \subseteq C(\overline{A})$. Fie $x \in C(A)$ arbitrar, cu $C(A)$ deschisă. Atunci conform Definiţiei 3.1.3 rezultă că $C(A)$ este vecinătate a lui X. Însă $C(A) \cap A = \Phi$, ceea ce implică $x \notin \overline{A}$, deci $x \in C(\overline{A})$.

Reciproc, să presupunem că $A = \overline{A}$. Fie $x \in C(A) = C(\overline{A})$; atunci $x \notin \overline{A}$, deci există o vecinătate $V(x)$ a punctului x, cu proprietatea $V(x) \cap A = \Phi$. Rezultă că $V(x) \subset C(A)$; de unde, pe baza proprietăţii 1) din Propoziţia 3.1.1, obţinem că $C(A)$ este o vecinătate a punctului x. Cum x a fost ales arbitrar din $C(A)$, deducem că $C(A)$ este o mulţime deschisă, adică A este închisă.

Definiţia 3.1.12 *Fie A o submulţime a spaţiului metric (X, d). Numim* **frontiera** *mulţimii A, notată cu ∂A sau $Fr\ A$, mulţimea $\overline{A} \cap \overline{C(A)}$. Punctele mulţimii $Fr\ A$ se numesc* **punctele frontieră** *ale mulţimii A.*

Este evident că $Fr\ A = \overline{A} - \mathring{A}$.

Exemplul 3.1.17. Dacă $A = [a, b]$, atunci $Fr\ A = \{a, b\}$.

Exemplul 3.1.18. Dacă $A = Q$, atunci $\overline{A} = \overline{Q} = \mathbb{R}$, $\overline{C(Q)} = \mathbb{R}$ şi $Fr\ A = \mathbb{R}$.

Exemplul 3.1.19. Dacă $A = \mathbb{R}^2$, atunci $Fr\ A = \Phi$.

Definiţia 3.1.13 *O submulţime A a unui spaţiu metric $X, d)$ se numeşte* **densă** *în X dacă $X = \overline{A}$.*

Exemplul 3.1.20. Mulţimea Q este densă în $\mathbb{R}$ (înzestrat cu metrica euclidiană) deoarece $\overline{Q} = \mathbb{R}$. La fel mulţimea numerelor iraţionale $\mathbb{R} - Q$ este densă în $\mathbb{R}$.
Exemplul 3.1.21. Mulţimea $Q^n = Q \times Q \times \ldots \times Q$ (de n ori) este densă în $\mathbb{R}$.

Definiţia 3.1.14 *Un spaţiu metric (X, d) se numeşte* **separabil dacă conţine o submulţime A numărabilă şi densă în X.**

Exemplul 3.1.22. Spaţiul metric $\mathbb{R}$ înzestrat cu metrica euclidiană este separabil deoarece Q este mulţime numărabilă şi densă în $\mathbb{R}$.
Exemplul 3.1.23. Spaţiu metric $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, înzestrat cu metrica euclidiană este separabil deoarece mulţimea Q^n este numărabilă şi densă în $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 3.1.15 *Fie A o submulţime a spaţiului metric (X, d). Un punct $x \in X$ se numeşte* **punct de acumulare** *pentru mulţimea A dacă pentru orice vecinătate $V(x)$ a lui x are loc $(V(x) - \{x\}) \cap A \neq \Phi$, adică în orice vecinătate $V(x)$ a punctului x se găsesc puncte din A, diferite de x.*

Mulţiema punctelor de acumulare ale mulţimii A se numeşte **mulţimea derivată** *şi se notează cu A'.*

Observaţia 3.1.2 *Orice punct de acumulare este un punct aderent.*

Observaţia 3.1.3 *În orice vecinătate a unui punct de acumulare x_0 se găseşte o infinitate de puncte din A. Într-adevăr, dacă propunem că există o vecinătate $V(x_0)$ a punctului x_0 care să conţină numai un număr finit de puncte $x_1, x_2, \ldots, x_n$, diferite de x_0 şi aparţinând lui A, atunci alegând r aşa încât $0 < r < \min\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda d(x_0, x_i)\}$, sfera $S(x_0, r)$ nu mai conţine nici un* *punct din A diferit de x_0, ceea ce contrazice definiţia punctului de acumulare.*

Din această observaţie rezultă că o mulţime finită nu are puncte de acumulare.

Definiţia 3.1.16 *Fie A o submulţime a spaţiului metric (X, d). Un punct $x \in A$ care nu este punct e acumulare pentru A se numeşte* **punct izolat**.

Altfel spus, un punct $x \in A$ este izolat dacă există o vecinătate $V(x)$ a sa astfel încât $V(x) \cap A = \{x\}$.

Exemplul 3.1.24. Pentru mulţimea $A = (0, 1) \cup \{2, 3\}$ din $\mathbb{R}$ avem $A' = [0, 1]$, iar punctele 2 şi 3 sunt izolate.

Teorema 3.1.4 *(de caracterizare a punctelor aderente şi a punctelor de acumulare). Fie A o submulţime a spaţiului metric $X, d)$.*

1) *un punct $x \in X$ este aderent mulţimii A dacă şi numai dacă există un şir (x_n) de puncte din A astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (în X).*

2) *Un punct $x \in X$ este punct de acumulare al mulţimii A dacă şi numai dacă există un şir (x_n) de puncte din A astfel încât $x_n \neq x$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (în X).*

Demonstraţie. 1) Să presupunem că $x \in \overline{A}$, adică este punct aderent pentru A. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, sfera deschisă $S\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ are puncte comune cu A. Alegem câte un punct $x_r \in A \cap S\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$, pentru orice $n \in N^*$. Obţinem, astfel, şirul de puncte (x_n) din A cu $d\left(x_n, x\right) < \dfrac{1}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Din $d(x_n, x) < \dfrac{1}{n}$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, ceea ce ne arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (în X).

Reciproc, dacă (x_n) este un şir de puncte din A, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (în X), atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in S(x,\varepsilon)$ de îndată ce $n > n_\varepsilon$. Rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $S(x,\varepsilon) \cap A \neq \Phi$, ceea ce ne asigură că $x \in \overline{A}$.

2) Demonstraţia se face în acelaşi mod ca la punctul 1), utilizând definiţia punctului de acumulare.

Definiţia 3.1.17 *Spaţiul metric (X,d) se numeşte* **compact***, dacă orice şir din X conţine un subşir convergent.*

Definiţia 3.1.18 *Mulţimea A din spaţiul metric (X,d) este* **compactă***, dacă orice şir (a_n) din A conţine un subşir convergent către un punct x_0 din A.*

Altfel spus, mulţimea A din (X,d) este compactă dacă şi numai dacă spaţiul metric (A,d) este compact.

Exemplul 3.1.25. Mulţimea $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, este compactă întrucât, conform Lemei lui Cesàro (vezi Propoziţia (1.1.11), orice şir de puncte din $[a,b]$ conţine un subşir convergent şi cum $[a,b]$ este închis, limita acestui subşir aparţine lui A.

Exemplul 3.1.26. Mulţimea $A = (a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, nu este compactă deoarece şirul $x_n = a + \dfrac{1}{n}$ nu conţine nici un subşir convergent la un punct din (a,b) (toate subşirurile lui x_n converg la a care nu aparţine mulţimii A).

Definiţia 3.1.19 *Fie (X,d) un spaţiu metric arbitrar şi A o submulţime a sa. O familie $\mathcal{D} = \{D_i | D_i \subset X, i \in I\}$ de părţi ale lui X se numeşte* **acoperire** *a mulţimii A dacă*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} D_i.$$

Dacă $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$ şi $A \subset \bigcup\limits_{D_i \in \mathcal{D}} D_i$, spunem că $\mathcal{D}_1$ este o **subacoperire** *a lui $\mathcal{D}$.*

O acoperire $\mathcal{D}$ a mulţimii A se va numi **deschisă** *dacă elementele lui $\mathcal{D}$ sunt mulţimi deschise.*

Exemplul 3.1.27. Fie $A = (1, 2) \subset \mathbb{R}$. Familia $\mathcal{D}$ formată din intervalele $D_i = \left(1 + \frac{1}{i}, 2\right)$, $i = 2, 3, \ldots$ formează o acoperire deschisă pentru A deoarece pentru orice $x \in A$ există un $i_0 \in \mathbb{N}^*$ aşa încât $1 + \frac{1}{i_0} < x$, adică orice $x \in A$ se află în cel puţin un interval D_i.

Propoziţia 3.1.5 (Lebesgue). *Dacă A este o mulţime compactă în spaţiul metric (X, d) iar $\mathcal{D} = \{D_i | i \in I\}$ este o acoperire deschisă a lui A, atunci există un $\varepsilon > 0$ aşa încât pentru orice x din A să existe un $i \in I$ aşa ca $S(x, \varepsilon) \subset D_i$.*

Demonstraţie. Vom proceda prin reducere la absurd.

Să presupunem că A este compactă dar pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $x_\varepsilon \in A$ aşa încât pentru orice $i \in I$, $S(x_\varepsilon, \varepsilon) \not\subset D_i$. În particular, pentru $\varepsilon = 1/n$ există $x_n \in A$ astfel încât pentru orice $i \in I$ are loc

$$S\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset D_i. \tag{3.1}$$

Deoarece A este compactă, şirul (x_n) conţine un sub şir (x_{n_k}) convergent la un punct $x \in A$. Cum $\mathcal{D}$ constituie o acoperire pentru A, există o mulţime $D_{i_0} \in \mathcal{D}$ aşa încât $x \in D_{i_0}$. Mulţimea D_{i_0} fiind deschisă există o sferă deschisă $S(x, r)$ aşa ca

$$S(x, r) \subset D_{i_o} \tag{3.2}$$

Din $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in A$ rezultă că există un număr natural k_0 depinzând de $r/2$ aşa ca pentru orice $k \geq k_0$ să avem

$x_{n_k} \in S\left(x, \dfrac{r}{2}\right)$, adică

$$d\left(x_{n_k}, x\right) < \frac{r}{2}. \tag{3.3}$$

Cum $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{n_k} = 0$, există un $k_1(r) \in \mathbb{N}$ aşa încât pentru orice $k > k_1$ să rezulte

$$\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}. \tag{3.4}$$

Fie $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$. Pentru orice $k > k_0$, din relaţiile (3.2), (3.3) şi (3.4) obţinem

$$S\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subset S(x, r) \subset D_{i_0},$$

incluziune ce contrazice (3.1). Cu aceasta teorema este demonstrată.

Propoziţia 3.1.6 *Dacă A este o mulţime în spaţiul metric (X, d), atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o familie finită de sfere deschise cu raza ε care constituie o acoperire deschisă a mulţimii A.*

Demonstraţie. Vom raţiona tot prin reducere la absurd. Presupunem că A este o mulţime compactă in (X, d) aşa încât există un $\varepsilon > 0$ pentru care nu există o acoperire finită cu sfere deschise de rază ε.

Fie $x_1 \in A$; atunci sfera $S(x_1, \varepsilon) \not\supset A$. Alegem $x_2 \in A$ aşa încât $x_2 \notin S(x_1, \varepsilon)$.

Acum considerăm sferele $S(x_1, \varepsilon)$ şi $S(x_2, \varepsilon)$, pentru care $A \not\subset S(x_1, \varepsilon) \cup S(x_2, \varepsilon)$. Prin urmare, există $x_3 \in A$ aşa ca $x_3 \in A$ şi $x_3 \notin S(x_1, \varepsilon)$, $x_3 \notin S(x_2, \varepsilon)$.

Din aproape în aproape, construim şirul (x_n) de puncte din A aşa încât

$$x_n \in A, x_n \notin S(x_i, \varepsilon), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

De aici rezultă că avem $d(x_n, x_i) \geq \varepsilon$, $i = \overline{1, n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, şirul (x_n) astfel construit cere proprietatea că $x_n \in A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dar

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon, \text{ pentru orice } n, m \in \mathbb{N}^*, \tag{3.5}$$

cu $n \neq m$.

Acum, se observă că şirul (x_n) nu poate conţine nici un subşir convergent, întrucât, dacă ar exista un asemenea subşir acesta ar trebui să fie şir Cauchy, ceea ce ar contrazice (3.5) .

Aşadar, şirul (x_n) nu poate conţine nici un subşir convergent, ceea ce contrazice faptul că A este o mulţime compactă. În concluzie enunţul teoremei este adevărat.

Teorema 3.1.5 *O mulţime A dintr-un spaţiu metric (X, d) este compactă dacă şi numai dacă din orice acoperire deschisă a sa se poate extrage o subacoperire finită.*

Demonstraţie. Să considerăm că A este o mulţime compactă. Fie $\mathcal{D} = \{D_i | i \in I\}$ o acoperire deschisă a mulţimii compacte A. Conform Propoziţiei 3.1.5 există $\varepsilon > 0$ aşa încât pentru orice $x \in A$ să existe $i \in I$ aşa ca

$$S(x, \varepsilon) \subset D_i. \tag{3.6}$$

Din Propoziţia 3.1.6, pentru acest $\varepsilon > 0$ există un număr finit de sfere cu raza ε care să acopere mulţimea A, adică

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon).$$

Din (3.6) rezultă că $S(x_k, \varepsilon) \subset D_{i,k}$, pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$. Atunci

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} D_{i,k},$$

adică din acoperirea $\mathcal{D}$ a lui A am extras o subacoperire finită $\mathcal{D}_1 = \{D_{i,k} | k = \overline{1, n}\}$ a sa, ceea ce trebuia demonstrat.

Reciproc, să admitem că din orice acoperire deschisă a mulţimii A se poate extrage o subacoperire finită. Vom raţiona prin reducere la absurd. Să presupunem că A nu este o mulţime compactă. Atunci, există un şir $(x_n) \subset A$ care nu conţine nici un subşir convergent, ceea ce înseamnă că mulţimea termenilor săi nu are nici un punct de acumulare. De aici, rezultă că pentru orice $x \in A$ există o sferă $S(x, \varepsilon_x)$ care conţine cel mult un număr finit de termeni ai şirului (x_n) deoarece, în caz contrar, ar exista un subşir al lui (x_n) care să conveargă la x.

Familia $\mathcal{D} = \{S(y, \varepsilon_y) | y \in A\}$ constituie o acoperire deschisă pentru A. Deci, din $\mathcal{D}$ se poate extrage o subacoperire finită

$$\mathcal{D}_1 = \{S(y_i, \varepsilon_{y_i}) | i = \overline{1, m}\}.$$

Cum $(x_n) \subset A \subset D_1$ iar fiecare din sferele $S(y_i, \varepsilon_{y_i})$ conţine cel mult un număr finit de termeni ai şirului (x_n) rezultă că şirul (x_n) are un număr finit de termeni, ceea ce constituie o contradicţie. Prin urmare, mulţimea A este compactă.

Teorema 3.1.6 *Orice submulţime compactă a unui spaţiu metric este mărginită şi închisă.*

Demonstraţie. Să considerăm A o submulţime compactă a spaţiului metric (X, d).

Mai întâi, să arătăm că A este mărginită. Să observăm că familia sferelor deschise $D = \{S(x, 1) | x \in A\}$ formează o acoperire deschisă pentru A. Conform cu Teorema 3.1.5, cum A este compactă, se poate extrage o subacoperire finită $\mathcal{D}_1 = \{S(x_i, 1) | x_i \in A, i = \overline{1, n}\}$. Fie $B = \{x_i | i = \overline{1, n}\}$, care este finită şi diametrul său $\delta(B) < \infty$.

Să considerăm acum x şi y două puncte arbitrare din A. Atunci există o sferă deschisă $S(x_i, 1) \in \mathcal{D}_1$, care conţine pe x şi, de asemenea, există sfera deschisă $S(x_j, 1)$ aşa ca

$y \in S(x_j, 1)$. Utilizând inegalitatea triunghiului, obţinem

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) < 2 + d(x_i, x_j) < 2 + \delta(B),$$

pentru orice x, y din A. Aşadar, $\delta(A) \leq 2 + \delta(B) < +\infty$, ceea ce ne arată că A este mărginită.

Acum, să arătăm că A este închisă, ceea ce este echivalent cu $C(A) = x - A$ este deschisă. Fie x un punct arbitrar din $C(A)$ şi fie $y \in A$. Cum $x \neq y$, utilizând proprietatea de separaţie Hausdorff (Teorema 3.1.1) a spaţiului metric (X, d) rezultă că există sferele deschise $S(y, r_y)$ şi $S(x, r_{x,y})$ aşa încât

$$S(y, r_y) \cap S(x, r_{x,y}) = \Phi. \tag{3.7}$$

Familia $\mathcal{D} = \{S(y, r_y) | y \in A\}$ este o acoperire deschisă pentru A şi cum A este compactă există o subacoperire finită a sa $\mathcal{D}_1 = \{S(y_i, r_{y_i}) | i = \overline{1, n}\}$ (Teorema 3.1.5).

Fiecărei sfere $S(y_i, r_{y_i})$ îi corespunde, pe baza lui (3.7), o sferă deschisă $S(x, r_{x,y_i})$.

Fie $r = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \{r_x, y_i\}$; atunci $S(x, r) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} S(x, r_{x,y_i})$ iar $S(x, r) \cap A = \Phi$ deoarece $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(y_i, r_{y_i})$ şi, din (3.7), avem $S(x, r) \cap S(y_i, r_{y_i}) = \Phi$. Aşadar, $S(x, r) \subset C(A)$, adică $C(A)$ este vecinătate pentru x. Cum x a fost ales arbitrar în $C(A)$ rezultă că mulţimea $C(A)$ este deschisă deoarece ea este vecinătate pentru orice punct al ei.

Condiţiile ca mulţimea A să fie mărgnită şi închisă sunt necesare pentru ca A să fie compactă. Aceste două condiţii nu sunt, în general, suficiente pentru compactitatea unei mulţimii într-un spaţiu metric.

Vom arăta că în spaţiile $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, înzestrate cu metrica euclidiană, aceste condiţii sunt şi suficiente.

Mai întâi vom demonstra următorul rezultat general.

Teorema 3.1.7 *Dacă (X, d_1) şi (Y, d_2) sunt două spaţii metrice compacte, atunci şi spaţiul $Z = X \times Y$, înzestrat cu metrica din Propoziţia 1.2.6, este compact*

Demonstraţie. Fie (z_n) un şir arbitrar din Z, cu $z_n = (x_n, y_n)$, $x_n \in X$, $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$. Cum (X, d_1) este compact, şirul (x_n) conţine un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent la $x \in X$. Considerând subşirul $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al şirului (y_n) şi ţinând seama că şi (Y, d_2) este compact, rezultă că există un subşir $(y_{n_{k_t}})_{t\in\mathbb{N}}$ al său, convergent la un punct $y \in Y$.

Ţinând seama de Teorema 1.2.2 rezultă că

$$\lim_{t\to\infty} z_{n_{k_t}} = \lim_{t\to\infty}(x_{n_{k_t}}, y_{n_{k_t}}) = (x, y),$$

ceea ce ne arată că spaţiul Z este compact.

Propoziţia 3.1.7 *Intervalul $[a, b]$ din $\mathbb{R}$, $a < b$, este o mulţime compactă.*

Demonstraţie. Dacă (x_n) este un şir arbitrar din $[a, b]$, rezultă că (x_n) este mărginit. Atunci, conform lemei lui Cesàro (Propoziţia 1.1.11) el conţine un subşir (x_{n_k}) convergent la un punct din $\mathbb{R}$. Cum $[a, b]$ este mulţime închisă rezultă că $x \in [a, b]$. Deci, $[a, b]$ este o mulţime compactă în $\mathbb{R}$.

Definiţia 3.1.20 *Fie $[a_i, b_i]$, $i = \overline{1, n}$, $n \geq 1$, n intervale ale lui $\mathbb{R}$. Mulţimea $P \subset \mathbb{R}^n$, unde*

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

se numeşte **paralelipiped închis** *în $\mathbb{R}^n$.*

Propoziţia 3.1.8 *Orice paralelipiped închis din $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, este o mulţime compactă.*

Demonstraţie. Valabilitatea propozoţiei rezultă imediat, utilizând Teorema 3.1.7 şi Propoziţia 3.1.7.

Acum putem demonstra:

Teorema 3.1.8 *O submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ este compactă dacă şi numai dacă este mărginită şi închisă.*

Demonstraţie. Dacă A este compactă, atunci pe baza Teoremei 3.1.6, deducem că ea este marginită şi închisă.

Reciproc, să admitem că submulţimea A a lui $\mathbb{R}^n$ este mărginită şi închisă şi să arătăm că este compactă.

Cum A este mărginită, există un paralelipiped închis P aşa încât $A \subseteq P$.

Fie (x_n) un şir abritrar în A; atunci el este şi în P şi cum P este o mulţime compactă rezultă că există un subşir (x_{n_k}) convergent la un punct $x \in P$. Dar x este punct aderent mulţimii A şi cum A este închisă rezultă că $A = \overline{A}$ (Teorema 3.1.3). Deducem că $x \in A$ şi deci A este compactă.

În finalul acestui paragraf vom introduce noţiunea de **conexitate**, care, intuitiv, descrie faptul că o mulţime este formată "dintr-o bucată", adică nu poate fi descompusă în două sau mai multe părţi separate.

Definiţia 3.1.21 *Spaţiul metric (X, d) se numeşte* **conex** *dacă nu există două mulţimi D_1, D_2 deschise, nevide şi disjuncte astfel ca $X = D_1 \cup D_2$. În caz contrar spaţiul (X, d) se numeşte* **neconex** *sau* **disconex**.

Deoarece $D_1 = C(D_2)$ şi $D_2 = C(D_1)$, rezultă că mulţimile D_1 şi D_2 sunt, în acelaşi timp, şi inchise, rezultând imediat următorul rezultat:

Propoziţia 3.1.9 *Într-un spaţiu metric (X, d) următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) (X, d) exte conex;

2) Nu există două mulţimi închise F_1 şi F_2, nevide şi disjuncte, aşa încât $X = F_1 \cup F_2$;

3) Singura mulţime nevidă din X simultan deschisă şi închisă este întreg spaţiul X.

Definiţia 3.1.22 *O submulţime A a spaţiului metric $(X.d)$ este* **conexă** *dacă (A, d) este un spaţiu metric conex.*

Altfel spus, A este conexă dacă nu există două mulţimi deschise în X, cu proprietăţile:

1) $D_1 \cap A \neq \Phi$, $D_2 \cap A \neq \Phi$

2) $A \subset D_1 \cup D_2$

3) $D_1 \cap D_2 \cap A = \Phi$.

Exemplul 3.1.28. Orice interval al lui $\mathbb{R}$ este o mulţime conexă.

Să demonstrăm acest fapt. Presupunem contrariul; adică există un interval $A \subset \mathbb{R}$ care este o mulţime neconexă. Conform Definiţiei 3.1.22, există două mulţimi deschise, nevide, D_1 şi D_2 în $\mathbb{R}$ aşa încât

$$D_1 \cup D_2 = A; \quad D_1 \cap D_2 = \Phi.$$

Există punctele $a \in D_1$ şi $b \in D_2$, $a \neq b$ (putem presupune că $a < b$). Cum A este interval rezultă că şi $[a, b]$ este interval şi $[a, b] \subset A$. Notăm $c = \sup(D_1 \cap [a, b])$. Cum D_1 este, în acelaşi timp, închisă în A rezultă că $c \in D_1$. Însă $b \in D_2$ şi deci $c \in D_1 \cap [a, b)$, adică $c \neq b$, deoarece, în caz contrar, $c = b \in D_2$, ceea ce ar conduce la $c \in D_1 \cap D_2$, lucru absurd. Aşadar, $c \in D_1 \cap [a, b)$ şi D_1 fiind deschisă în A există $\varepsilon > 0$ astfel încât $c + \varepsilon \in D_1 \cap [a, b)$, ceea ce contrazice faptul că $\sup(D_1 \cap [a, b)) = c$. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, rezultând că A este conexă.

Observaţia 3.1.4 *Are loc şi reciproca pentru afirmaţia din exemplul 3.1.28: orice submulţime nevidă şi conexă a lui $\mathbb{R}$ este un interval.*

Vom raţiona prin reducere la absurd. Să admitem că există o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ conexă, care nu este interval. Atunci există trei puncte x_1, x_2, x_3 din $\mathbb{R}$ aşa încât $x_1, x_3 \in A$, $x_1 <$

$x_2 < x_3$, iar $x_2 \notin A$. Considerăm mulţimile $D_1 = (-\infty, x_2) \cap A$ şi $D_2 = A \cap (x_2, +\infty)$. Evident că D_1 şi D_2 sunt închise în A, $D_1 \cup D_2 = A$ şi $D_1 \cap D_2 = \Phi$. Prin urmare, A este o mulţime neconexă, ceea ce constituie o contradicţie. Aşadar, A este un interval.

Exemplul 3.1.29. În spaţiul metric $\mathbb{R}$ mulţimea $A = (1, 2) \cup (3, 4)$ este neconexă. Într-adevăr, mulţimile $D_1 = (1, 2)$ şi $D_2 = (3, 4)$ sunt deschise, $A = D_1 \cup D_2$, iar $D_1 \cap D_2 \cap A = \Phi$, $D_1 \cap A = (1, 2) \neq \Phi$, $D_2 \cap A = (3, 4) \neq \Phi$.

Definiţia 3.1.23 *O mulţime deschisă şi conexă se numeşte* **domeniu**. *O mulţime închisă şi conexă se numeşte* **continuu**.

Exemplul 3.1.30. O sferă deschisă din $\mathbb{R}^m$ este un domeniu, iar una închisă este un continuu.

3.2 Funcţii între spaţii metrice

Definiţia 3.2.1 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice. O apliacţie $f : A \to B$, $A \subseteq X$ şi $B \subseteq Y$, se numeşte* **funcţie definită între două spaţii metrice**.

Definiţia 3.2.2 *Dacă $X = \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ şi $Y = \mathbb{R}$, atunci funcţia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, se numeşte* **funcţie reală de o variabilă vectorială** $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in A$ *sau* **funcţie reală de m variabile reale** *şi se notează prin $y = f(x)$ sau $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.*

Este evident că valorile y ale funcţiei $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ depind de cele m variabile. Din punct de vedere sistemic variabilele independente $x_1, x_2, \ldots, x_m$ reprezintă mărimi ce pot fi controlate sau precizate, numite **date de intrare**, iar variabila dependentă y precizează valoarea rezultată prin acţiunea lui f asupra datelor de intrare şi se numeşte **data de ieşire** (v.fig.3.2.1).

Fig.3.2.1

Observaţia 3.2.1 *Funcţiile reale de mai multe variabile se mai numesc şi* **funcţii scalare** *sau* **câmpuri scalare**.

Graficul unei funcţii reale de m variabile reale, definită pe o mulţime $A \subseteq \mathbb{R}^m$, este o mulţime de puncte din $\mathbb{R}^{m+1}$, ceea ce face să avem o imagine geometrică numai pentru $m \leq 2$. Astfel, dacă $m = 1$ atunci funcţia $y = f(x)$, $x \in A \subset \mathbb{R}$ are ca şi grafic o curbă plană, iar dacă $m = 2$ funcţia reală $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $y = f(x_1, x_2)$ are ca şi grafic o suprafaţă (Σ) în spaţiul $\mathbb{R}^3$ (v.fig.3.2.2).

Fig.3.2.2

Definiţia 3.2.3 *Dacă* $X = \mathbb{R}^m$ *şi* $Y = \mathbb{R}^p$, *o funcţie* $f : A \to B$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, *se numeşte* **funcţie vectorială de variabilă vectorială**.

Dacă $x = (x_1, \ldots, x_m) \in A$ iar $y = (y_1, \ldots, y_p) \in B$, atunci funcţia vectorială poate fi scrisă

$$y = f(x),$$

iar desfăşurat:

$$(y_1, \ldots, y_p) = (f_1(x_1, \ldots, x_m), f(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_m))$$

unde f_i, $i = \overline{1,p}$, sunt funcţii de m variabile reale definite pe A cu valori în $\mathbb{R}$.

Funcţiile $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $i = \overline{1,p}$ se numesc **componentele** funcţiei vectoriale f.

Rezultă că studiul unei funcţii vectoriale se reduce la studiul unor funcţii reale de mai multe variabile reale.

Cazuri particulare. 3.2.1. Dacă $p = 1$, atunci funcţia vectorială de variabilă vectorială se reduce la o funcţie reală de mai multe variabile reale.

3.2.2. Dacă $p = 2$ şi $m = 1$, atunci funcţia vectorială are forma

$$(y_1, y_2) = (x, y) = \overrightarrow{f(t)} = (f_1(t), f_2(t)), \quad t \in A \subseteq \mathbb{R},$$

de unde

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad t \in A,$$

care constituie **reprezentarea parametrică** a unei **curbe plane** Γ (v.fig.3.2.3).

Fig.3.2.3

3.2.3. Dacă $p = 3$ şi $m = 1$, atunci funcţia vectorială are forma

$$(y_1, y_2, y_3) = (x, y, z) = \overrightarrow{f(t)} = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)), t \in A \subseteq \mathbb{R},$$

de unde

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t), t \in A,$$

care constituie reprezentarea parametrică a unei **curbe în spaţiu**.

3.2.4. Dacă $p = 3$ şi $m = 2$, atunci funcţia vectorială are forma

$$(y_1, y_2, y_3) = (x, y, z) = \overrightarrow{f}(u, v) =$$

$$= (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)), (u, v) \in A \subseteq \mathbb{R}^2,$$

de unde

$$x = f_1(u, v), y = f_2(u, v), z = f_3(u, v), (u, v) \in A,$$

care constituie **reprezentarea parametrică** a unei **suprafeţe $\sum$ în spaţiu** (v.fig.3.2.4).

Fig.3.2.4

3.2.5. Dacă $p = 3$ şi $m = 3$, atunci o astfel de funcţie vectorială se numeşte **câmp vectorial**.

De obicei, modelele matematice utilizate în descrierea fenomenelor economice se descriu prin funcţii reale de mai multe variabile reale.

Exemplul 3.2.1. Funcţia de producţie. O problemă des întâlnită în practica economică se referă la condiţiile de combinare a factorilor pentru producerea unui produs Y de către o întreprindere: Dacă condiţiile tehnice ale producţiei sunt date, cantitatea y din produsul Y realizată depinde numai de factorii variabili ai producţiei folosiţi $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sunt cantităţile folosite din aceşti factori, atunci putem scrie funcţia de producţie

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

care este o funcţie de m variabile reale.

Exemplul 3.2.2. Funcţia cererii. Să presupunem că n mărfuri de consum $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ se vând la preţuri invariabile

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ pe o piaţă cu concurenţă, care constă dintr-un număr de consumatori, cu gusturi şi venituri date. În această situaţie cantitatea y_k de marfă Y_k, $k = \overline{1,n}$, cerută pe piaţă depinde numai de preţurile tuturor mărfurilor de pe piaţă. Aceasta înseamnă că funcţia cererii pentru marfa Y_k este

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

care este o funcţie de n variabile. Funcţia cerere pentru toate cele n mărfuri va fi o funcţie vectorială

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

În practică, între funcţiile cerere $y_k = f_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = \overline{1,n}$, se studiază anumite corelaţii.

Exemplul 3.2.3. Funcţia costurilor de producţie. Să admitem că o întreprindere produce mărfurile $X_1, X_2, \ldots, X_n$ în condiţii tehnice de producţie şi condiţii de aprovizionare date. Atunci funcţia costurilor de producţie este

$$y = f(x_1, \ldots, x_n),$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt cantităţile de mărfuri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ produse, iar y este costul total. Pentru comoditate, în cazul a două mărfuri X şi Y funcţia costurilor se poate lua de forma particulară

$$z = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f.$$

3.3 Limita unei funcţii într-un punct

Fie (X, d_1) şi (X, d_2) două spaţii metrice, $F : A \to Y$, $A \subseteq X$, o funcţie şi x_0 un punct de acumulare al mulţimii A ($x_0 \in A'$).

Definiţia 3.3.1 (cu vecinătăţi.) *Spunem că funcţia f are limită în punctul x_0, dacă există un punct $l \in Y$ astfel încât,* *pentru orice vecinătate $U(l)$ a lui l, există o vecinătate $V(x_0)$ aşa încât, pentru orice $x \in V(x_0) \cap A - \{x_0\}$, să avem $f(x) \in U(l)$, adică*

$$f(V(x_0) \cap A - \{x_0\}) \subset U(l).$$

Scriem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Intuitiv noţiunea de limită a funcţiei f în punctul x_0 exprimă faptul că dacă ne apropiem de x_0 prin puncte din mulţimea A, atunci valorile funcţiei în aceste puncte se apropie oricât de mult de punctul l din Y.

Teorema 3.3.1 (de caracterizare a noţiunii de limită.) *Fie $f : A \to (Y, d_2)$, unde $A \subseteq (X, d_1)$ şi $x_0 \in A'$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) l este limita funcţiei f în punctul x_0 (definiţia cu vecinătăţi);

2) pentru orice sferă deschisă $S_Y(l, \varepsilon)$ din spaţiul metric Y există o sferă deschisă $S_X(x_0, \delta_\varepsilon)$ din spaţiul metric X astfel încât, pentru orice $x \in S_X(x_0, \delta_\varepsilon) \cap A - \{x_0\}$ să avem $f(x) \in S_Y(l, \varepsilon)$ **(definiţia cu sfere)***;*

3) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A - \{x_0\}$ cu $d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon$ să avem $d_2(f(x), l) < \varepsilon$ **(definiţia cu ε şi δ)***;*

4) pentru orice şir convergent de puncte din $A - \{x_0\}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \overset{X}{=} x_0$ să rezulte $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \overset{Y}{=} l$ **(definiţia cu şiruri** *sau* **definiţia lui Heine)**

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi că din 1) rezultă 2). Luăm $U(l) = S_Y(l, \varepsilon)$, unde $\varepsilon > 0$ este arbitrar. Conform cu 1), există o vecinătate $V(x_0)$ aşa încât, pentru orice $x \in V(x_0) \cap A - \{x_0\}$ să avem $f(x) \in U(l)$. Cum $V(x_0)$ este o vecinătate pentru x_0, există o sferă deschisă $S_X(x_0, \delta_\varepsilon) \subset$

$V(x_0)$. Atunci pentru orice $x \in S_X(x_0, \delta_\varepsilon) \cap A - \{x_0\}$ avem $f(x) \in U(l) = S_Y(l, \varepsilon)$, adică 2) este îndeplinită.

Acum să arătăm că din 2) rezultă 3). Pentru aceasta este suficient să exprimăm sferele şi condiţiile de la 2) prin inegalităţi.

Să demonstrăm acum că din 3) rezultă 4). Fie (x_n) un şir de puncte din $A_{\{}x_0\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \stackrel{X}{=} x_0$. Din 3) rezultă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ aşa încât, pentru orice $x \in A - \{x_0\}$ cu $d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon$ să avem $d_2(f(x), l) < \varepsilon$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \stackrel{X}{=} x_0$, există un $n_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ aşa ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_{\delta_\varepsilon}$ să rezulte $d_1(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon$. Atunci $d_2(f(x), l) < \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_{\delta_\varepsilon} = n_\varepsilon$. Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ aşa încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$ să avem $d_2(f(x_n), l) < \varepsilon$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$, ceea ce trebuia demonstrat.

Demonstraţia teoremei este încheiată dacă arătăm că din 4) rezultă 1). Vom raţiona prin reducere la absurd. Să presupunem că există o vecinătate $U(l)$ a lui R astfel ca, oricare ar fi $V(x_0)$ o vecinătate a lui x_0, să existe $x \in V(x_0) \cap A - \{x_0\}$ pentru care $f(x) \notin U(l)$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ luăm $V(x) = S\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$. Atunci există $x_n \in V(x_0) \cap A - \{x_0\}$ cu $x_n \neq x_0$ aşa încât $f(x_n) \notin U(l)$. Cum $x_n \in S\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$, avem $d_X(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. De aici rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Conform cu 4), deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$; atunci există $n_1 \in \mathbb{N}$ aşa încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ să avem $f(x_n) \in U(l)$, ceea ce contrazice $f(x_n) \notin U(l)$. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă şi deci din 4) rezultă 1).

Observaţia 3.3.1 *Afirmaţiile 1) – 4) din teorema 3.3.1 fiind echivalente logic, rezultă că oricare din ele poate fi luată* *ca definiţie a limitei unei funcţii într-un punct. În continuare, noi vom folosi mai mult definiţia cu şiruri deoarece ne va permite ca să obţinem proprietăţile limitelor de funcţii din proprietăţile limitelor de şiruri.*

Observaţia 3.3.2 *Definiţia limitei cu şiruri a limtiei unei funcţii într-un punct se utilizează la a dovedi că o funcţie nu are limită într-un punct. Pentru aceasta este suficient să găsim un şir* (x_n), $(x_n) \subset A - \{x_0\}$, *cu* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *aşa încât* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ *să nu existe sau să aflăm două şiruri* $(x_n^{(1)})$ *şi* $(x_n^{(2)})$ *din* $A - \{x_0\}$, *ambele convergente la* x_0, *pentru care şirurile* $(f(x_n^{(1)}))$ *şi* $(f(x_n^{(2)}))$ *să aibă limite diferite în* Y.

Teorema 3.3.2 *Fie spaţiile metrice* (X, d_1) *şi* (Y, d_2), $A \subseteq X$, $x_0 \in A'$ *şi* $f : A \to Y$ *o funcţie. Dacă* f *are limită în* x_0, *atunci această limită este unică.*

Demonstraţie. Valabilitatea afirmaţiei rezultă aplicând definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct şi ţinând seama că limita unui şir de puncte dintr-un spaţiu metric este unică.

Teorema 3.3.3 *Fie* $\overrightarrow{f} : A \to \mathbb{R}^p$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $p \geq 2$, *funcţia vectorială* $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$, *unde* $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,p}$ *şi* $x_0 \in A'$. *Atunci* $\overrightarrow{f}$ *are limita* $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p)$ *în punctul* x_0 *dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x) = l_i$, $i = \overline{1,p}$.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă imediat folosind definiţia limtiei unei funcţii cu şiruri şi faptul că în $\mathbb{R}^n$ convergenta unui şir de elemente este echivalentă cu convergenţa pe coordonate (v.Teorema 1.2.2).

Observaţia 3.3.3 *Din Teorema 3.3.3 rezultă că studiul limitei funcţiilor vectoriale se reduce la studiul funcţiilor reale de mai multe variabile reale* $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$.

Dacă $x_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A'$ se obişnuieşte a nota $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, prin

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \vdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

Utilizând cele demonstrate la şiruri pentru funcţiile care iau valori reale rezultă:

Teorema 3.3.4 *Fie $f, g : A \to \mathbb{R}$, unde $A \subseteq (X, d)$ şi $x_0 \in A'$. Dacă există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$, cu $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, atunci există*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x)$ *şi valoarea ei este* $l_1 + l_2$*;*

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x)$ *şi valoarea ei este* $l_1 l_2$*;*

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *şi valoarea ei este* $\dfrac{l_1}{l_2}$*, dacă* $l_2 \neq 0$ *şi* $g(x) \neq 0$ *pentru* $x \in A$*.*

Observaţia 3.3.4 *Dacă $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci pot să apară aşa numitele "operaţii fără sens", care se elimină prin diferite metode.*

Observaţia 3.3.5 *Fie $f : A \to (Y, d)$, cu $A \subseteq \mathbb{R}$, o funcţie şi $x_0 \in A'$. Dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s$ (respectiv $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d$), atunci spunem că f are* **limită la stânga** *(respectiv* **limită la dreapta***) în punctul x_0. Limitele la stânga şi la dreapta într-un punct poartă numele de limită laterală.*

Se arată că f are limită în punctul x_0 dacă şi numai dacă există atât limita la stânga l_s cât şi limita la dreapta l_d în punctul x_0 pentru f şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_s = l_d$.

Exemple. 3.3.1. Să calculăm

a) $l_1 = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x^3}{2x}, (1+x)^{\frac{2}{2x}}, x^2+x+1\right)$

b) $l_2 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2y^2+1, (1+xy)^{\frac{1}{xy}}, \dfrac{x^2+1}{x^2+y^2}\right)$

a) Avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{2} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{2x}} = \lim_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^2 = e^2;$$

de unde $l_1 = (0, e^2, 1)$.

b) Pentru l_2 avem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2+1) = 1; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}} = e$$

şi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0, \text{ deoarece } \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = |y|,$$

de unde $l_2 = (1, e, 0)$.

3.3.2. Să se arate că $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ nu are limită în punctul $(0,0) = \theta$. Considerăm şirul de puncte $z_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\alpha}{n}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi convergent la $\theta = (0,0)$. Avem

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha}{n}\right) = \frac{\frac{\alpha}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{\alpha}{n^2}} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2},$$

adică limita şirului $\left(f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{\alpha}{n}\right)\right)$ depinde de α, de unde rezultă că funcţia f nu are limită în $(0,0)$.

3.4 Continuitatea funcţiilor între spaţii metrice

În acest paragraf vom adânci studiul ideii intuitive de "**apropiere**" a valorilor unei funcţii de valoarea ei într–un punct dat x_0 de îndată ce valorile argumentului sunt suficient de aproape de x_0.

Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice şi $f : A \to Y$ o funcţie, unde $A \subseteq X$ este o submulţime a lui X.

Definiţia 3.4.1 (cu vecinătăţi.) *Spunem că funcţia f este* **continuă în punctul** $x_0 \in A$ *dacă pentru orice vecinătate $U(f(x_0))$ a lui $f(x_0)$ există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 aşa încât pentru orice $x \in V(x) \cap A$ să avem $f(x) \in U(f(x_0))$.*

Dacă funcţia f nu este continuă în punctul $x_0 \in A$, atunci spunem că funcţia f este **discontinuă în punctul** x_0 *sau că x_0 este* **punct de discontinuitate** *a funcţiei f.*

Teorema 3.4.1 *Funcţia $f : A \to Y$, $A \subseteq X$, este continuă în punctul $x_0 \in A$ dacă şi numai dacă are loc una din situaţiile:*

i) sau x_0 este punct izolat;

ii) sau x_0 este punct de acumulare pentru A şi
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Demonstraţie.

i) Într-adevăr, în orice punct izolat al domeniului de definiţie o funcţie este continuă. Fie x_0 un punct izolat pentru mulţimea A; atunci există o vecinătate $V(x_0)$ a sa, aşa încât $V(x_0) \cap A = \{x_0\}$. Acum, rezultă că pentru orice vecinătate $U(f(x_0))$ există o vecinătate $V(x_0)$ astfel încât, pentru orice $x \in V(x_0) \cap A$, să avem $f(x) \in U(f(x_0))$.

ii) Să admitea că f este continuă în punctul x_0. Atunci pentru orice vecinătate $U(f(x_0))$ există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 aşa încât pentru orice $x \in V(x_0) \cap A$ să avem $f(x) \in U(f(x_0))$. Evident că această afirmaţie are loc şi pentru $x \neq x_0$, ceea ce implică $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Reciproc, dacă presupunem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$, atunci pentru orice $U(x_0)$, există o vecinătate $V(x_0)$ aşa încât, pentru orice $x \in V(x_0) \cap (A - \{x_0\})$ să avem $f(x) \in U(f(x_0))$. Cum pentru $x = x_0 \in A$ avem evident $f(x_0) \in U(f(x_0)$, rezultă că pentru orice $x \in V(x_0) \cap A$ avem $f(x) \in U(f(x_0)))$, ceea ce ne arată că f este continuă în x_0.

Observaţia 3.4.1 *Dacă x_0 este punct de acumulare din A şi funcţia f este continuă în x_0, atunci putem scrie*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right),$$

ceea ce ne spune că operaţia de trecere la limită este permutabilă cu funcţia f.

Teorema 3.4.2 (de caracterizare a continuităţii în punct). *Fie $f : A \to (Y, d_2)$ o funcţie, unde $A \subseteq (X, d_1)$ şi $x_0 \in A$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) f este continuă în punctul x_0 (definiţia cu vecinătăţi 3.4.1)

2) pentru orice sferă deschisă $S_Y(f(x_0), \varepsilon)$ din spaţiul metric Y, există o sferă deschisă $S_\lambda(x_0, \delta_\varepsilon)$ din spaţiul metric X astfel încât, pentru orice $x \in S_X(x_0, \delta_\varepsilon) \cap A$ să avem $f(x) \in S_Y(f(x_0), \varepsilon)$ **(definiţia cu sfere)***;*

*3) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ cu $d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon$, să avem $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$***(definiţia cu ε şi δ)***;*

4) pentru orice şi convergent de puncte din A cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \stackrel{X}{=} x_0$ *să rezulte* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \stackrel{Y}{=} f(x_0)$ **(definiţie cu şiruri)**.

Demonstraţie. Valabilitatea teoremei rezultă imediat din Teorema 3.3.1 de caracterizare a noţiunii de limită.

Teorema 3.4.3 *Fie* $f : A \to \mathbb{R}^p$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $p \geq 2$, *funcţia vectorială* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$, *unde* $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,p}$ *şi* $x_0 \in A$. *Atunci* f *este continuă în punctul* $x_0 \in A$, *dacă şi numai dacă funcţiile* f_i *sunt continue în* x_0, $i = \overline{1,p}$.

Demonstraţie. Utilizând Teoremele 3.4.1 şi 3.3.4, rezultă imediat valabilitatea celor afirmate în enunţul teoremei.

Definiţia 3.4.2 *Fie* $f : A \to (Y, d_2)$, *unde* $A \subset (X, d_1)$, *o funcţie. Zicem că funcţia* f *este* **continuă pe** D *dacă* f *este continuă în orice punct din* D.

Exemple. 3.4.1. Fie (X, d) un spaţiu metric şi k un element fixat din X. Funcţia $f : X \to X$, $f(x) = k$, oricare ar fi $x \in X$, este continuă pe X deoarece dacă $x_0 \in X$ şi $x_n \xrightarrow{X} x_0$, atunci $f(x_n) \xrightarrow{X} k = f(x_0)$, adică este satisfăcută definiţia cu şiruri a continuităţii în x_0.

3.4.2. Fie $1_X : (X, d) \to (X, d)$ aplicaţia identică, adică $1_X(x) = x$, oricare ar fi $x \in X$. Atunci 1_X este continuă pe X. Într-adevăr, să considerăm un $x_0 \in X$ arbitrar; atunci pentru orice şir $(x_n) \subset X$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \stackrel{X}{=} x_0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} 1_x(x_n) \stackrel{X}{=} \lim\limits_{n\to\infty} x_n \stackrel{X}{=} x_0 = 1_X(x_0)$, ceea ce ne arată că 1_X este continuă în x_0.

3.4.3. (Continuitatea funcţiilor compuse.) Fie (X, d_1), $(Y, d_2$ şi (Z, d_3) trei spaţii metrice şi fie funcţiile $f : X \to Y$, $y : Y \to Z$. Dacă f este continuă în $x_0 \in X$ şi g este continuă în $f(x_0) \in Y$, atunci $g \circ f$ este continuă în x_0.

Folosim definiţia cu şiruri a continuităţii. Fie (x_n) un şir arbitrar din X cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{X}{=} x_0$. Din continuitatea lui f în x_0 rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \overset{Y}{=} f(x_0)$. Acum, ţinând seama de continuitatea lui g în $f(x_0)$, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) \overset{Z}{=} g(f(x_0))$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n) \overset{Z}{=} (g\circ f)(x_0)$, ceea ce ne arată că $g\circ f$ este continuă în $x_0 \in X$.

3.4.4. (Prelungirea prin continuitate). Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice, $A \subset X$ şi x_0 un punct de acumulare din A. Dacă $f : A - \{x_0\} \to Y$ este o funcţie definită pe $A - \{x_0\}$, atunci am putea prelungi funcţia f la mulţimea A în diferite moduri atribuindu-i lui f o valoarea arbitrară în x_0. Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{Y}{=} l \in Y$, am putea considera funcţia

$$\widetilde{f} : A \to Y, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ,\text{dacă } x \in A - \{x_0\}, \\ l & ,\text{dacă } x = x_0, \end{cases}$$

care este, evident, o prelungire a lui f pe A.

Deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} \widetilde{f}(x) = l = \widetilde{f}(x_0)$, rezultă că f este continuă în x_0. Funcţia $\widetilde{f}$ ataşată funcţiei f poartă numele de **prelungirea funcţiei f prin continuitatea în punctul x_0.**

3.4.5. (Funcţii continue cu valori reale). Fie $f, g : (X, d) \to \mathbb{R}$ funcţii continue şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci:

1) $f + g$, λf şi fg sunt continue pe X;

2) $\dfrac{f}{g} : X - \{x \in X | g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ este continuă pe $X - \{x \in X | g(x) = 0\}$;

3) $|f|$ este continuă pe X.

Pentru a demonstra aceste afirmaţii să observăm mai întâi că dacă x_0 este punct izolat, atunci valabilitatea celor trei afirmaţii rezultă din teorema 3.4.1, punctul i). Dacă x_0

este punct de acumulare atunci afirmaţiile 1) şi 2) rezultă din teorema 3.3.4, utilizând definiţia cu şiruri a continuităţii.

Pentru a demonstra 3) este suficient să arătăm că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \stackrel{X}{=} x_0$,atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = |f(x_0)|$. Cum

$$|\ |f(x_n)| - |f(x_0)|\ | \leq |f(x_n) - f(x_0)|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şi din f continuă în x_0, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = |f(x_0)|$, adică $|f|$ este continuă în x_0.

3.4.6. (Continuitate laterală). Fie $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A \subset \mathbb{R}$, şi fie $x_0 \in A$ un punct acumulare pentru D. Dacă există limita la stânga în x_0, $f(x_0 - 0) = f_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$, iar $f_s(x_0) = f(x_0)$, atunci spunem că f este **continuă la stânga în** x_0. Dacă există limită la dreapta în x_0, $f(x_0{+}0) = f_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$, iar $f_d(x_0) = f_{(x_0)}$atunci spunem că f este **continuă la dreapta în** x_0.

Ţinând seama de Observaţie 3.3.5, deducem că o funcţie f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă f este continuă atât la stânga cât şi la dreapta în punctul x_0.

Punctul de acumulare $x_0 \in A$ se numeşte punct de **discontinuitate de speţa (specia) întâia** dacă f nu este continuă în x_0, $f_s(x_0)$ şi $f_d(x_0)$ există, sunt finite şi diferite. Punctul $x_0 \in A$ se numeşte **de discontinuitate de speţa a II-a** dacă este punct de discontinuitate şi nu este de speţa întâia.

Dacă $x_0 \in A$ este un punct de discontinuitate de speţa întâia pentru funcţie f, atunci expresiile

$$s_f(x_0) = |f_d(x_0) - f_s(x_0)|$$

şi

$$osc\ (f; x_0) = \max\{|f_d(x_0) - f_s(x_0)|, |f(x_0) - f_s(x_0)|,$$
$$, |f(x_0) - f_d(x_0)|\}$$

se numesc **saltul lui** f **în** x_0 şi respectiv **oscilaţia lui** f **în** x_0.

3.4.7. (Discontinuităţile funcţiilor monotone). O funcţie monotonă f, definită pe intervalul (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, poate avea puncte de discontinuitate numai de speţa întâia.

Să presupunem că funcţia f este crescătoare şi să alegem un punct x_0 arbitrar din (a, b). Există punctele $x_1, x_2 \in (a, b)$ astfel încât $x_1 < x_0 < x_2$. Pentru orice $x \in (x_1, x_0)$ avem $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0)$, de unde prin trecere la limită rezultă $f(x_1) \leq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leq f(x_0)$, ceea ce ne arată că $f(x_0 - 0)$ este finită. În mod analog, considerând $x \in (x_0, x_2)$, obţinem că $f(x_0 + 0)$ este finită. Prin urmare, dacă x_0 este punct de discontinuitate, atunci el este de speţa întâia.

Din demonstraţie rezultă că pentru orice $x_0 \in (a, b)$ au loc inegalităţile

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0).$$

Definiţia 3.4.3 *Fie X şi Y două spaţii liniare normate. Spunem că operatorul liniar $T : X \to Y$ este* **mărginit** *dacă există un număr $M > 0$ aşa încât*

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \tag{3.8}$$

pentru orice $x \in X$.

Vom arăta că în cazul operatorilor liniari, mărginirea este echivalentă cu continuitatea lor.

Teorema 3.4.4 *Dacă T este un operator liniar între spaţiile liniare normate X şi Y, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) T este continuu pe X;

2) T este continuu în originea θx a spaţiului X;

3) T este mărginit.

Demonstraţie. Din 1) rezultă imediat deoarece T fiind continuu pe X este continuu în orice punct al lui X, deci şi în θx. Acum, să arătăm că din 2) rezultă 3). Din faptul că operatorul T este continuu în θx rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există δ_ε aşa încât, pentru orice $x \in X$ cu $\|x\| < \delta_\varepsilon$, să avem $\|T(x) - T(\theta x)\| = \|T(x)\| < \varepsilon$. În particular, luând $\varepsilon = 1$ există $\delta_1 > 0$ aşa încât din $||x|| < \delta_1$ să rezulte $||T(x)|| < 1$.

Se observă că (3.8) este verificată pentru $x = \theta x$. Fie acum $x \neq \theta x$. Să considerăm $y = \dfrac{\delta_1}{2}\dfrac{x}{\|x\|}$. Atunci $\|y\| = \left\|\dfrac{\delta_1}{2} \cdot \dfrac{x}{\|x\|}\right\| = \dfrac{\delta_1}{2} < \delta_1$, ceea ce conduce la $\|T(y)\| \leq 1$. De aici obţinem

$$\left\|T\left(\frac{\delta_1}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|\frac{\delta_1}{2\|x\|}T(x)\right\| \leq 1,$$

de unde

$$\frac{\delta_1}{2\|x\|}\|T(x)\| \leq 1,$$

adică

$$\|T(x_0)\| \leq \frac{2}{\delta_1}\|x\|,$$

pentru orice $x \in X$. Prin urmare, operatorul T este mărginit.

Să arătăm că 3) implică 1). Din faptul că T este mărginit rezultă că există $M > 0$ aşa încât (3.8) să aibă loc.

Fie $x_o \in X$ arbitrar. Pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $x \in X$, aşa încât $\|x - x_0\| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, avem

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq M\|x - x_0\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

ceea ce exprimă continuitatea operatorului T.

Corolarul 3.4.1 *Dacă $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este un operator liniar, atunci el este continuu.*

Demonstraţie. Fie $T = (T_1, T_2, \dots, T_p)$, unde $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,p}$. Dacă T este operator liniar, atunci rezultă că şi aplicaţiile T_i sunt liniare.

Conform Teoremei 3.4.3, a arăta că T este un oeprator liniar continuu revine la a arată că T_i, $i = \overline{1,p}$, sunt funcţii continue. Prin urmare, este suficient să arătăm că un operator liniar $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este continuu.

Fie $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$. Dacă $x \in \mathbb{R}^n$ atunci $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ şi deci $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Atunci

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{r=1}^{n} x_i T(e_i),$$

de unde, utilizând inegalitatea lui Cauchy–Schwartz–Buniakowski, avem

$$|T(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} T^2(e_i)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = M\|x\|,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, care ne arată că T este un operator liniar mărginit. Aşadar, conform Teoremei 3.4.4, rezultă că T este operator continuu.

În continuare vom prezenta câteva proprietăţi cu privire la transformarea mulţimilor deschise, respectiv închise, compacte şi conexe printr-o aplicaţie continuă.

Teorema 3.4.5 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice şi $f : X \to Y$ o funcţie. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) f este continuă pe X;

2) pentru orice mulţime deschisă D din Y, imaginea inversă $f^{-1}(D)$ este mulţime deschisă în X;

3) pentru orice mulţime închisă B din Y, imaginea inversă $f^{-1}(B)$ este mulţime închisă în X;

4) pentru orice submulţime A a lui X, avem $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Demonstraţie. Să arătăm că din 1 rezultă 4). Fie $x \in \overline{A}$ aşa ca $y = f(x)$. Cum $x \in \overline{A}$ rezultă că există un şir de puncte (x_n) din mulţimea A aşa încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{X}{=} x$. Din continuitatea lui f rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \overset{Y}{=} f(x) = y$,adică am arătat că în mulţimea $f(A)$ există un şir de puncte $(f(x_n))$ aşa ca $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \overset{Y}{=} y$. Prin urmare, $y \in \overline{f(A)}$, ceea ce ne arată că am dovedit incluziunea $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Acum, să arătăm că 4) implică 3). Fie B o mulţime închisă în Y, adică $B = \overline{B}$ în Y. Notăm $f^{-1}(B)$ cu A. Conform ipotezei 4) avem

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B,$$

de unde

$$\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(B) = A.$$

Cum $A \subset \overline{A}$, rezultă că $A = \overline{A}$, ceea ce ne arată că $A = f^{-1}(B)$ este închisă în X.

Să arătăm că 3) implică 2). Fie D o mulţime deschisă în Y. Atunci $B = Y - D$ este închisă în Y. Conform ipotezei 3) mulţimea $f^{-1}(B) = f^{-1}(Y - D)$ este închisă în X. De aici rezultă că

$$X - f^{-1}(B) = X - [f^{-1}(Y) - f^{-1}(D)] = f^{-1}(D)$$

este deschisă în X.

Mai avem de demonstrat că din 2) rezultă 1). Fie x_0 un punct arbitrar din X şi $D = S_Y(f(x_0), \varepsilon)$ o sferă deschisă din Y. Conform ipotezei 2), mulţimea $f^{-1}(D)$ este mulţime deschisă în X. Rezultă că $f^{-1}(D)$ este o vecinătate pentru $x_0 \in X$.

Atunci există o sferă $S_X(x_0, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(D)$ aşa încât pentru orice $x \in S_X(x_0, \delta_\varepsilon)$ să avem $f(x) \in S_Y(f(x_0), \varepsilon) = D$, ceea ce ne arată că f este continuă în x_0 (vezi Teorema 3.4.2).

Observaţia 3.4.2 *Mulţimea funcţiilor continue pe X cu valori în Y se notează prin $C(X, Y)$.*

Definiţia 3.4.4 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice şi $f : A \subset X \to Y$ o funcţie. Spunem că f este* **uniform continuă pe** *A, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ (acelaşi pentru toate punctele $x \in A$) astfel încât, oricare ar fi $x_1, x_2 \in A$ cu proprietatea $d_1(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon$ are loc $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.*

Propoziţia 3.4.1 *Dacă $f : A \subset X \to Y$ este o funcţie uniform continuă pe A, atunci f este continuă pe A.*

Demonstraţie. Să considerăm x_0 un punct arbitrar din A. Din faptul că f este uniform continuă pe A rezultă că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice $x_1, x_2 \in A$ cu $d_1(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon$, are loc $d_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$. Atunci, oricare ar fi $x \in A$ aşa încât $d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon$, are loc $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, adică f este continuă în x_0. Cum x_0 a fost ales arbitrar din A, rezultă că f este continuă pe A.

Observaţia 3.4.3 *Reciproca Propoziţiei 3.4.1 este falsă, adică există funcţii continue pe o mulţime, care nu sunt uniform continue.*

Exemplul 3.4.8. Fie $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1]$. Se observă că f este continuă pe $(0, 1]$.

Să presupunem că f este uniform continuă pe $(0, 1]$, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta_\varepsilon > 0$, acelaşi pentru toate punctele $x \in (0, 1]$, aşa încât pentru orice $x_1, x_2 \in (0, 1]$ cu proprietatea $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ să aibă loc $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Să luăm, în particular, $\varepsilon = 1/2$, când obţinem că există $\delta_{\frac{1}{2}} > 0$ astfel încât pentru orice $x_1, x_2 \in (0,1]$ cu $|x_1 - x_2| < \delta_{\frac{1}{2}}$, avem $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| < \frac{1}{2}$.

Fie $x_1 = 1/n$ şi $x_2 = 1/(n+1)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ ales aşa încât $\frac{2}{n} < \delta_{1/2}$. Atunci, cum $|x_1 - x_2| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{2}{n} < \delta_{\frac{1}{2}}$, ar trebui ca $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = |n - (n+1)| = 1 < \frac{1}{2}$, ceea ce constituie o contradicţie. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă deci f nu este uniform continuă pe $(0,1]$.

Observaţia 3.4.4 *Uniform continuitatea este o proprietate* **globală** *pentru o funcţie, referindu-se la întreg domeniul de definiţie, al funcţiei, în timp ce, continuitatea unei funcţii într-un punct este o proprietate* **locală**.

Definiţia 3.4.5 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice. Spunem că aplicaţia $f : A \subset X \to Y$ este lipschitziană pe A, dacă există un număr $\alpha \geq 0$ astfel încât oricare ar fi $x_1, x_2 \in A$, are loc $d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha d_1(x_1, x_2)$. Se mai zice că f este lipschitziană în raport cu α, sau α–lipschitziană.*

Propoziţia 3.4.2 *Orice contracţie a unui spaţiu metric (X, d) este o funcţie lipschitziană.*

Demonstraţie. Fie f o contracţie a lui X. Atunci, conform Definiţiei 1.2.8, există $\alpha \in [0,1)$ aşa că pentru orice $x_1, x_2 \in X$, avem $d(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2)$, care ne arată că f este lipschitziană.

Propoziţia 3.4.3 *Orice funcţie lipschitziană este uniform continuă.*

Demonstraţie. Fie $f : A \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o funcţie α–lipschitziană pe A, adică pentru orice $x_1, x_2 \in A$, are loc $d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha d_1(x_1, x_2)$. Fie $\varepsilon > 0$. Dacă $\alpha = 0$,a tunci $d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq 0$, pentru orice $x_1, x_2 \in A$. Rezultă că $f(x_1) = f(x_2)$ oricare ar fi $x_1, x_2 \in A$, deci f este constantă pe A şi prin urmare este uniform continuă pe A.

Dacă $\alpha > 0$, luând $\delta_\varepsilon = \varepsilon/\alpha$, atunci pentru orice $x_1, x_2 \in A$ cu $d_1(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon$, are loc $d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha d_1(x_1, x_2) < \alpha \cdot \dfrac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$, ceea ce ne arată că f este uniform continuă pe A.

Acum, să facem câteva precizări asupra funcţiilor continue pe mulţimi compacte.

Teorema 3.4.6 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice şi $f : X \to Y$ o funcţie continuă. Dacă A este o submulţime compactă a lui X, atunci $f(A)$ este o submulţime compactă a lui Y.*

Demonstraţie. Fie (y_n) un şir din $f(A)$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in K$, aşa încât $f(x_n) = y_n$. Mulţimea K fiind compactă, conform cu Definiţia 3.1.18, şirul (x_n) conţine un subşir (x_{n_k}) convergent. Din continuitatea lui f rezultă că şirul $(f(x_{n_k}))$ este un subşir convergent al şirului (y_n) şi prin urmare, $f(A)$ este o mulţime compactă din Y.

Definiţia 3.4.6 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice. Spunem că o funcţie $f : A \subseteq X \to Y$ este mărginită dacă mulţimea $f(A)$ este mărginită în Y.*

Acum, din Teorema 3.4.6 obţinem următorul rezultat.

Corolarul 3.4.2 *Orice funcţie continuă pe un compact dintr-un spaţiu metric este mărginită.*

Demonstraţie. Fie $f : A \subset (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o funcţie continuă şi A o submulţime compactă a lui X; conform Teoremei 3.4.6 rezultă ca $f(A)$ este compactă în Y. Atunci $f(A)$ este mărginită în Y şi deci funcţia f este mărginită pe A.

În caz particular, din Corolarul 3.4.2 obţinem următorul rezultat cunoscut din liceu:

Corolarul 3.4.3 *Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f este mărginită.*

Observaţia 3.4.5 *Dacă mulţimea A, pe care funcţia f este continuă, nu este compactă, atunci rezultatul Corolarului 3.4.2 nu se mai păstrează.*

Într-adevăr, dacă considerăm funcţia $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 1/x$; pentru orice $x \in (0, 2)$, aceasta este continuă pe $(0, 2)$, dar $f(0, 2) = (1/2, \infty)$ şi deci f nu este mărginită.

Definiţia 3.4.7 *Fie (X, d) un spaţiu metric, $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie, $M = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ – marginea superioară a lui f pe X şi, respectiv, $m = \inf\limits_{x \in X} f(x)$ – marginea inferioară a lui f pe X.*

Spunem, că f îşi atinge **marginea superioară***, respectiv* **marginea inferioară pe mulţimea** *X dacă există un punct $x_1 \in X$, respectiv un punct $x_2 \in X$, aşa ca $M = f(x_1)$, respectiv $f(x_2) = m$.*

Spunem că f îşi **atinge marginile** *pe X dacă f îşi atinge atât marginea superioară cât şi marginea inferioară pe X.*

Teorema 3.4.7 (Weierstrass). *Dacă A este o submulţime compactă a spaţiului metric (X, d) şi $f : X \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f îşi atinge marginile pe mulţimea A.*

Demonstraţie. Pe baza Corolarului 3.4.2 rezultă că $f(A)$ este mărginită în $\mathbb{R}$. Fie $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ şi $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$. Deoarece M şi m sunt puncte aderente pentru mulţimea $f(A)$ rezultă că $M \in \overline{f(A)}$ şi $m \in \overline{f(A)}$. Din $f(A)$ este compactă rezultă că este mulţime închisă şi atunci $M \in f(A)$ şi $m \in f(A)$.

Deci, rezultă că există $x_1 \in A$ aşa încât $f(x_1) = M$ şi există $x_2 \in A$ aşa ca $f(x_2) = m$, ceea ce ne arată că f îşi atinge marginile pe A.

În particular, din Teorema 3.4.7 obţinem cunoscuta teoremă a lui Weierstrass studiată în liceu.

Corolarul 3.4.4 *Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ este mărginită şi îşi atinge marginile pe $[a, b]$.*

Dăm acum o reciprocă pentru Propoziţia 3.4.1.

Teorema 3.4.8 (Cantor.) *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice. Dacă $f : A \subseteq X \to Y$ este o funcţie continuă pe A, iar A este o mulţime compactă în X, atunci f este uniform continuă pe A.*

Demonstraţie. Presupunem că f nu este uniform continuă. Atunci, există un $\varepsilon_0 > 0$ aşa încât pentru orice $\delta > 0$ există $x_{1,\delta}, x_{2,\delta} \in A$ cu proprietatea că $d_1(x_{1,\delta}, x_{2,\delta}) < \delta$ şi $d_2(f(x_{1,\delta}), f(x_{2,\delta})) \geq \varepsilon_0$.

În particular, dacă $\delta = 1/n$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ şi notăm $x_{1,\delta} = x_n$, $x_{2,\delta} = y_n$ obţinem şirurile (x_n), (y_n) din A cu proprietatea că $d_1(x_n, y_n) < \delta$ şi $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$.

Din faptul că mulţimea A este compactă rezultă că şirul (x_n) conţine un subşir (x_{n_k}) convergent la punctul $x_0 \in A$. Considerăm subşirul (y_{n_k}) a şirului (y_n). Cum

$$d_1(y_{n_k}, x_0) \leq d_1(y_{n_k}, x_{n_k}) + d_1(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{n_k} + d_1(x_{n_k}, x_0)$$

şi

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{n_k} + d_1(x_{n_k}, x_0) = \right) = 0,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(y_{n_k}, x_0) = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n_k} \overset{Y}{=} x_0$.

Funcţia f fiind continuă, rezultă că

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{Y}{=} f(x_0) \text{ şi } \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) \overset{Y}{=} f(x_0),$$

de unde

$$\lim_{k\to\infty} d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) = 0,$$

care este în contradicţie cu $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$.

Aşadar, f este uniform continuă pe A.

În încheierea acestui paragraf să abordăm câteva proprietăţi ale funcţiilor continue pe mulţimi conexe.

Teorema 3.4.9 *Fie (X, d_1) şi (Y, d_2) două spaţii metrice şi $f : A \subseteq X \to Y$ o funcţie continuă pe A. Dacă A este conexă în X, atunci $f(A)$ este conexă în Y.*

Demonstraţie. Vom proceda prin reducere la absurd. Să presupunem contrariul. Atunci există două mulţimi nevide. D_1, D_2, deschise în Y, aşa ca

$$D_1 \cap D_2 \cap f(A) = \emptyset, \quad D_1 \cap f(A) \neq \emptyset, \quad D_2 \cap f(A) \neq \emptyset \quad (3.9)$$

$$f(A) \subset D_1 \cup D_2.$$

Din faptul că f este continuă, pe baza Teoremei 3.4.5, rezultă că mulţimile $\Delta_1 = f^{-1}(D_1)$ şi $\Delta_2 = f^{-1}(D_2)$ sunt deschise în X. În plus, $\Delta_1 \neq \emptyset$, $\Delta_2 \neq \emptyset$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap A = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) \cap A = f^{-1}(D_1 \cap D_2) \cap A = \emptyset$, $\Delta_1 \cap A \neq \emptyset$, $\Delta_2 \cap A \neq \emptyset$ şi $A \subset \Delta_1 \cup \Delta_2$. De aici, rezultă că A este neconexă, ceea ce este o contradicţie. Prin urmare, $f(A)$ este conexă în Y.

Corolarul 3.4.5 (Proprietatea valorilor intermediare). *Fie (X, d) un spaţiu metric şi A o submulţime conexă a sa. Dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este continuă pe A, $a, b \in A$ şi $f(a) < f(b)$, atunci pentru orice $\lambda \in (f(a), f(b))$ există $c_\lambda \in A$ aşa ca $f(c_\lambda) = \lambda$.*

Demonstraţie. Din Teorema 3.4.9 rezultă că $f(A)$ este conexă. De aici, pe baza Observaţiei 3.1.4, deducem că $f(A)$ este interval. Prin urmare, dacă $f(a), f(b) \in f(A)$,atunci intervalul $(f(a), f(b))$ este înclus în $f(A)$, de unde rezultă afirmaţia din Corolar.

Din Corolarul 3.4.5 obţinem rezultatul cunoscut:

Corolarul 3.4.6 *Dacă I este un interval al lui $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe I, atunci mulţimea $f(I)$ este un interval.*

Definiţia 3.4.8 *Fie (X, d_1) şi $(Y, d_2$ două spaţii metrice. Spunem că funcţia $f : X \to Y$ are* **proprietatea lui Darboux** *dacă transformă orice submulţime conexă a lui X într-o submulţime conexă a lui Y.*

Observaţia 3.4.6 *Teorema 3.4.9 ne spune că orice funcţie continuă are proprietatea lui Darboux.*

Observaţia 3.4.7 *În particular, o funcţie reală $f : I \to \mathbb{R}$, I interval din $\mathbb{R}$, are proprietatea Darboux dacă pentru orice $a, b \in I$ cu $a < b$ şi pentru orice $\lambda \in (f(a), f(b))$ sau $\lambda \in (f(b), f(a))$, există un element $c_\lambda \in (a, b)$ aşa ca $f(c_\lambda) = \lambda$*

Propoziţia 3.4.4 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie, unde I este un interval al lui $\mathbb{R}$. Dacă f are proprietatea lui Darboux, atunci f poate avea numai discontinuităţi de speţa a doua.*

Demonstraţie. Vom folosi metoda reducerii la absurd. Presupunem că funcţia f are un punct $x_0 \in I$ de discontinuitate de speţa întâia. Atunci, există limitele laterale $f_s(x_0)$ şi $f_d(x_0)$ finite şi ori $f(x_0) \neq f_s(x_0)$, ori $f(x_0) \neq f_d(x_0)$. Să presupunem că $f(x_0) < f_d(x_0)$. Considerăm $\lambda \in \mathbb{R}$ aşa încât $f(x_0) < \lambda < f_d(x_0)$; de aici, avem $f_d(x_0) - \lambda > 0$. Din definiţia limitei rezultă că pentru $\varepsilon = f_d(x_0) - \lambda > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ aşa ca, pentru orice $x \in (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$, să avem

$$|f(x) - f_d(x_0)| < \varepsilon = f_d(x_0) - \lambda,$$

de unde $f(x) > \lambda$, pentru orice $x \in (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$.

Cum $x_0 + \delta_\varepsilon/2 \in (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$, avem $f(x + \delta_\varepsilon/2) >$

$\lambda > f(x_0)$, adică λ este valoare intermediară. Atunci, din faptul că f are proprietatea lui Darboux rezultă că există $c_\lambda \in (x_0, x_0+\delta_\varepsilon)$ aşa ca $f(c_\lambda) = \lambda$, ceea ce contrazice $f(x) > \lambda$, pentru orice $x \in (x_0, x_0+\delta_\varepsilon)$. Presupunerea făcută este falsă, rezultând că f nu poate avea decât puncte de discontinuitate de speţa a doua.

Corolarul 3.4.7 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie, unde I este un interval al lui $\mathbb{R}$. Dacă f este monotonă şi are proprietatea lui Darboux, atunci f este continuă pe I.*

Demonstraţie. Conform Exemplului 3.4.3 funcţia f fiind monotonă ar putea avea numai discontinuităţi de speţa întâia, iar, conform Propoziţiei 3.4.4, posedând proprietatea Darboux, poate avea numai discontinuităţi de speţa a doua. Prin urmare, f trebuie să fie continuă.

Teorema 3.4.10 *Fie I un interval al lui $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $J = f(I)$. Atunci f este o bijecţie de la I la J dacă şi numai dacă f este strict monotonă. În acest caz inversa $f^{-1} : J \to I$ este, de asemenea, strict monotonă (de acelaşi sens) şi continuă.*

Demonstraţie. Să considerăm că f nu este strict monotonă. Atunci există trei puncte x_1, x_2, x_3 în I aşa ca $x_1 < x_2 < x_3$ dar $f(x_1) > f(x_2)$ şi $f(x_2) < f(x_3)$ (sau $f(x_1) < f(x_2)$ şi $f(x_2) > f(x_3)$). Fie $\lambda = \min(f(x_1), f(x_2))$ şi $\mu = (\lambda + f(x_2))/2$. Fără a influenţa rigurozitatea demonstraţiei, putem alege $\lambda = f(x_1)$. Atunci

$$f(x_2) < \mu = \frac{\lambda + f(x_2)}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f(x_1)$$

şi cum f, fiind continuă, are proprietatea lui Darboux, rezultă că există $c \in (x_1, x_2)$ aşa ca $\mu = f(c)$. Dar avem şi

$$f(x_2) < \mu = \frac{\lambda + f(x_2)}{2} < f(x_3),$$

rezultă de aici că există $d \in (x_2, x_3)$ aşa ca $f(d) = \mu$. Rezultă că $f(c) = f(d)$ şi fum f este bijectivă obţinem $c = d$, ceea ce este imposibil deoarece $x_1 < c < x_2 < d < x_3$.

Aşadar, presupunerea făcută este falsă. Rezultă că f este strict monotonă.

Reciproc, să considerăm că $f : I \to J$ este strict monotonă şi continuă. De aici, rezultă că f este injectivă (strict monotonă) şi surjectivă ($J = f(I)$), deci f este bijectivă.

Fără a restrânge generalitatea, să presupunem că f este strict crescătoare şi să arătăm că şi $f^{-1} : J \to I$ are aceeaşi proprietate.

Fie y_1, y_2 din J cu $y_1 < y_2$. Notăm cu $x_1 = f^{-1}(y_1)$ şi cu $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Atunci $f(x_1) = y_1$ şi $f(x_2) = y_2$. Cum f^{-1} este injectivă, avem $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$. Dacă am avea $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, atunci, cum f este strict crescătoare, rezultă $f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$, de unde $y_1 > y_2$, ceea ce este în contradicţie cu $y_1 < y_2$. Rămâne că $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, ceea ce arată că f^{-1} este strict crescătoare. Cum f^{-1} este strict monotonă şi posedă proprietatea lui Darboux, de unde, pe baza Corolarului 3.4.7, rezultă că f^{-1} este continuă.

Observaţia 3.4.8 *Utilizând această teoremă, se arată cu uşurinţă că funcţiile inverse ale principalelor funcţii elementare sunt continue.*

3.5 Probleme

1. Calculaţi limitele următoarelor funcţii în punctele indicate:

a) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin \dfrac{2}{x}$, în $x = 0$;

b) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3^{x-1} - 1}{x - 1}$, în $x = 1$;

c) $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{4x^2 + y^4}$, în $(0, 0)$;

d) $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1, y > 1\} \to R$,
$f(x,y) = (2 + xy - x - y)^{\frac{(x-1)(y-1)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}}$, în $(1,1)$;

e) $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^5y^3}{x^8+y^6}$, în $(0,0)$;

f) $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$, în $(0,0)$.

2. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in Q \\ 0 & , x \in \mathbb{R} - Q, \end{cases}$$

nu are limită în nici un punct.

3. Să se determine $\mathring{A}$, Ext$A$, FrA, $\overline{A}$, A' în $\overline{\mathbb{R}}$, unde:

a) $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;

b) $A = [2,4] \cup (5,6) \cup \{7\}$;

c) $A = Q$;

d) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

4. Fie $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu metrica euclidiană. Aflaţi $\mathring{A}$, Ext$A$, FrA, $\overline{A}$ şi A' în $\mathbb{R}^2$ pentru mulţimea

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 - 2x < 0\}.$$

5. Reprezentaţi grafic în $\mathbb{R}^2$ mulţimile:

a) $A = [2,3] \times [3,4]$;

b) $A = [-1,1] \times \{1,3\}$;

c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$.

6. Reprezentaţi grafic în $\mathbb{R}^3$ mulţimile:

a) $A = [2,3] \times [3,4] \times [-2,2]$;

b) $A = [2,3] \times [-3,3] \times \{1,2\}$;

c) $A = \{(x,y,z) | x+y+z=1\}$;

d) $A = \{(x,y,z) | 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$.

7. Studiaţi continuitatea următoarelor funcţii:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^x - 1}{x} & , x \neq 0 \\ \ln 3 & , x = 0 \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in Q \\ 2x & , x \in \mathbb{R} - Q \end{cases}$

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y^2}} & , \text{ dacă } y \neq 0, x \in \mathbb{R} \\ 0 & , \text{ dacă } y = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$

d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y} & , \text{ dacă } y \neq 0, x \in \mathbb{R} \\ 0 & , \text{ dacă } y = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$

e) $f: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, y > 0, z > 0\} \to \mathbb{R}$,

$f(x,y,z) = \begin{cases} (1+xyz)^{\frac{xyz}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}} & , \text{ dacă } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & , \text{ dacă } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$

8.Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definită prin $f(x,y,z) = (z, x+y+z)$, oricare ar fi $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Arătaţi că f este continuă pe $\mathbb{R}^3$.

9. Fie $f, g : (X, d_1) \to (Y, d_2)$, două funcţii continue pe X. Arătaţi că mulţimea $A = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ este închisă.

10. Fie $f, g : (X, d) \to \mathbb{R}$ două funcţii continue pe X. Arătaţi că mulţimea $A = \{x \in X | f(x) < g(x)\}$ este deschisă.

11. Fie (X, d) un spaţiu metric. Arătaţi că funcţia d :

$X \times X \to \mathbb{R}$ este continuă pe $X \times X$.

12. Fie (X, d) un spaţiu metric. Arătaţi că reuniunea şi intersecţia a două submulţimi compacte ale lui X sunt mulţimi compacte.

13. Să se arate că orice funcţie uniform continuă transformă un şir Cauchy într-un şir Cauchy.

14. Să se arate că nu există funcţii continue:

a) care să aplice intervalul $[2, 3]$ din $\mathbb{R}$ pe intervalul $(2, 3)$;

b) care să aplice intervalul $[1, 3]$ pe $\mathbb{R}$.

15. Să se arate că funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } x = 0 \\ \sin \dfrac{\pi}{x} & , \text{ dacă } x \in (0, 1] \end{cases}$$

nu este continuă în $x = 0$, dar f are proprietatea lui Darboux.

16. Să se arate că următoarele mulţimi sunt conexe:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$;

b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$;

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x + 1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

17. Să se arate că ecuaţia $x \cdot 3^x = 1$ are cel puţin o soluţie pe intervalul $[0, 1]$.

18. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că există $c \in (a, b)$ aşa încât

$$f(c) = \frac{1}{a - c} + \frac{1}{b - c}.$$

3.6 Test de verificare a cunoştinţelor nr. 3

1. Definiţi următoarele noţiuni:

   a) Funcţie între două spaţii metrice;

   b) Limita unei funcţii între două spaţii metrice (definiţia cu şiruri);

   c) Funcţie continuă într-un punct ($f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ cu (X, d_1) şi (Y, d_2) spaţii metrice);

   d) Funcţie vectorială;

   e) Funcţie uniform continuă.

2. Să se demonstreze că o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică şi care nu este constantă nu are limită la $+\infty$ şi $-\infty$.

3. Calculaţi $L = \lim\limits_{x\to\infty} (2^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

4. a) Fie funcţia $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0. \end{cases}$$

   Să se studieze continuitatea funcţiei f.

   b) Se dă funcţia $f : [a, b] \to [a, b]$ continuă pe $[a, b]$. Să se arate că $(\exists)$ $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$.

5. a) Folosind definiţia să se arate că:

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (x^2 + xy) = 4$$

   b) Arătaţi cu ajutorul definiţiei cu şiruri că funcţia $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ nu are limită în origine.

6. Arătaţi cu ajutorul definiţiei cu şiruri că funcţia $f(x,y) = \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$, $y^2-2x \neq 0$ nu are limită în origine.

7. Cercetaţi limitele iterate şi limita globală (dacă este cazul) în origine pentru funcţia:

   a) $f(x,y) = \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$, $x+y \neq 0$,

   b) $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y}$, $y \neq 0$.

8. Calculaţi:

   a) $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$,

   b) $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.

9. Studiaţi uniform continuitatea funcţiei:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}\ , \qquad x \in (1,\infty).$$

10. Studiaţi uniform continuitatea funcţiei:

$$f:(1,2)\times(1,2)\to\mathbb{R}\ , \qquad f(x,y) = \frac{x}{y}.$$

Capitolul 4

Derivarea funcţiilor reale

" Activitatea este singura cale spre cunoaştere"

(G. B. Shaw)

În acest capitol vom trece în revistă noţiunea de derivată pentru o funcţie reală de o variabilă reală şi proprietăţile ei mai principale, multe dintre ele cunoscute din liceu.

Am văzut că multe fenomele şiinţifice, în particular economice, sunt descrise prin funcţii $y = f(x)$, pentru care trebuie să studiem viteza variaţie a lui y când x variază. Rezolvarea acestei probleme fundamentale a ştiinţei se face cu ajutorul derivatei.

În domeniul economic cu ajutorul derivatei se introduc două concepte importante: conceptul de **medie** şi conceptul **marginal**. Conceptul de medie exprimă variaţia lui y pe întreg intervalul de valori ale lui x, iar conceptul marginal se referă la variaţia lui y "la margine", adică corespunzător unor variaţii foarte mici ale lui x pornind de la o valoare dată.

4.1 Definiţia derivatei şi proprietăţile ei de bază

Fie funcţia $f : A \to \mathbb{R}$, unde A este o submulţime a lui $\mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in A$ un punct de acumulare pentru A.

Definiţia 4.1.1 *Spunem că funcţia f* **are derivată în punctul** x_0 *dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

notată, de obicei, cu $f'(x_0)$.

Dacă derivata $f'(x_0)$ există şi este finită zicem că funcţia f este **derivabilă în punctul** x_0. *Dacă $f'(x_0) = +\infty$ sau $f'(x) = -\infty$, atunci vom spune că f are* **derivata infinită în punctul** x_0.

Propoziţia 4.1.1 *Dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in A \cap A'$, atunci f este continuă în x_0.*

Demonstraţie. Din ipoteză avem că există şi este finită

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Se observă că pentru orice $x \in A - \{x_0\}$, avem

$$f(x) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0),$$

de unde prin trecere la limită obţinem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ceea ce ne arată că f este continuă în x_0.

Observaţia 4.1.1 *Reciproca Propoziţiei 4.1.1 este falsă deoarece există funcţii continue într-un punct care nu sunt derivabile în acel punct. Pentru aceasta, este suficient să considerăm funcţia $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, care este continuă pe $\mathbb{R}$ dar nu este derivabilă în 0.*

Definiţia 4.1.2 *Dacă funcţia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, este derivabilă în orice punct al unei submulţimi B a lui A, atunci spunem că f este* **derivabilă** *pe B.*

Dacă B este formată din toate punctele lui A în care funcţia f este derivabilă, atunci B se numeşte **domeniul de derivabilitate a lui** f.

În acest caz, funcţia definită pe B cu valori reale care asociază fiecărui punct $x \in B$ derivata $f'(x)$ în punctul x se numeşte **derivata lui** f pe mulţimea B şi notăm prin f'.

Operaţia prin care din funcţia f obţinem funcţia f' se numeşte **operaţie de derivare**.

Definiţia 4.1.3 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in A$ un punct de acumulare pentru $A \cap (-\infty, x_0)$. Dacă există limita*

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

atunci numim această limită **derivata la stânga** *a funcţiei f în punctul x_0.*

Dacă $x_0 \in A$ este punct de acumulare pentru $A \cap (x_0, +\infty)$ şi există limita

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

atunci numim această limită **derivata la dreapta** *a funcţiei f în punctul x_0.*

Dacă $f'_s(x_0)$, respectiv $f'_d(x_0)$, este finită, atunci spunem că f este **derivabilă la stânga**, *respectiv* **la dreapta**, *în punctul x_0.*

Observaţia 4.1.2 *Dacă funcţia f este definită pe un interval $[a, b]$ şi are derivată la dreapta în punctul a, respectiv la stânga în punctul b, atunci convenim să spunem că f are derivată în a, respectiv în b.*

Din legătura între limita unei funcţii într-un punct şi limitele laterale în acel punct, obţinem:

Propoziţia 4.1.2 *O funcţie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are derivată în punctul* $x \in A \cap A'$ *dacă şi numai dacă* f *are derivată la dreapta şi la stânga în punctul* x_0*, iar* $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0)$*.*

Teorema 4.1.1 *Fie* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *două funcţii derivabile în* $x_0 \in A \cap A'$ *şi* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Atunci sunt variabile afirmaţiile:*

1) Suma $f + g$ *este derivabilă în* x_0 *şi*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

2) Produsul λf *este derivabilă şi*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0);$$

3) Produsul fg *este derivabilă în* x_0 *şi*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4) Dacă $g(x_0) \neq 0$*, atunci funcţia cât* f/g *este derivabilă în* x_0 *şi*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Demonstraţia teoremei se face utilizând definiţia derivatei. De exemplu, să demonstrăm afirmaţia de la 3). Avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} =$$
$$= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 4.1.2 (Derivarea funcţiilor compuse sau regula lanţului) *Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$, I şi J fiind intervale. Dacă f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ şi g este derivabilă în punctul $f(x_0)$, atunci funcţia $h : I \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(f(x_0))$ ($h = g \circ f$) este derivabilă în punctul x_0 şi $h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ adică $(g \circ h)' = (g' \circ f)f'$.*

Demonstraţie. Considerăm funcţia ajutătoare $u : J \to \mathbb{R}$, definită prin

$$u(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & , \text{ dacă } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & , \text{ dacă } y = y_0 = f(x_0) \end{cases} \tag{4.1}$$

Cum $\lim_{y\to y_0} u(y) = g'(y_0)$ rezultă că u este continuă în punctul $y_0 = f(x_0)$. Din (4.1) obţinem:

$$g(y) - g(y_0) = u(y)\cdot(y-y_0), \text{ pentru orice } y \in J$$

Deci avem

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = u(f(x_0))(f(x) - f(x_0)),$$

pentru orice $x \in I$.

Rezultă că, pentru orice $x \in I - \{x_0\}$ avem

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} = u(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4.2}$$

Cum f este derivabilă în x_0 rezultă că f este continuă în x_0, de unde, ţinând seama de continuitatea lui u în $y_0 = f(x_0)$, deducem că funcţia compusă $u \circ f$ este continuă în x_0.

Acum, utilizând derivabilitatea lui f în punctul x_0 obţinem din (4.2) că există limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = u(f(x))f'(x_0) \tag{4.3}$$

Dar din (4.1), avem $u(y_0) = u(f(x_0)) = g'(y_0) = = g'(f(x_0))$ şi atunci din (4.3) obţinem

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 4.1.3 *Fie $f : I \to J$, I, J intervale ale lui $\mathbb{R}$, o funcţie continuă şi bijectivă. Dacă f este dervabilă în punctul $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia inversă f^{-1} este derivabilă în punctul $f(x_0) = y_0$ şi are loc formula*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

adică

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Demonstraţie. Ţinând seama de Teorema 3.4.10 rezultă că f este strict monotonă. În această situaţie deducem că funcţia inversă f^{-1} este strict monotonă şi continuă. Fie $y \in I - \{y_0\}$ şi $x = f^{-1}(y)$. Deoarece $y \neq y_0$, ţinând seama de strict monotonia lui f^{-1}, rezultă că şi $x \neq x_0$. Acum, putem scrie

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}},$$

de unde prin trecere la limită rezultă

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

În finalul acestui paragraf să introducem noţiunea de derivată de ordin superior.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe mulţimea D. În acest caz, există funcţia derivată $f' : D \to \mathbb{R}$.

Definiţia 4.1.4 *Spunem că funcţia $f : D \to \mathbb{R}^2$ este de* **două ori derivabilă** *într-un punct $x_0 \in D$, dacă f este derivabilă într-o vecinătate a punctului x_0 şi f' este derivabilă în punctul x_0. În acest caz derivata lui f' în punctul x_0 se numeşte* **derivata a doua** *a lui f în x_0 şi o notăm cu $f''(x_0)$.*

Dacă f' este derivabilă pe D, atunci derivata lui f' se numeşte **derivata a doua** *(sau* **de ordinul doi***) a lui f şi se notează cu f''.*

În general, spunem că f este **derivabilă de n ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) ori** *în $x_0 \in D$ dacă f este de $(n-1)$ ori derivabilă pe o vecinătate V a lui x_0 şi dacă derivata de ordin $(n-1)$, notată prin $f^{(n-1)}$, este derivabilă în punctul x_0.*

Spunem că f este **derivabilă de n ori pe D dacă** *f* **este derivabilă de n ori în orice punct** *$x \in D$.*

Derivatele succesive ale lui f se notează prin $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, ..., $f^{(n)}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Convenim, de asemenea, să notăm prin $f^{(0)} = f$.

În general, aflarea derivatei de ordinul n a funcţiei f se face prin inducţie matematică.

Exemplul 4.1.1. Se consideră funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax+b)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, iar E domeniul maxim de definiţie al lui f. Să se calculeze $f^{(n)}$. Avem

$$f'(x) = \alpha a (ax+b)^{\alpha - 1}$$

$$f'' = \alpha(\alpha-1)a^2(ax+b)^{\alpha-2}\dots$$

Presupunem că $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)a^n(ax+b)^{\alpha-n}$ şi să demonstrăm că $f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)(ax+b)^{\alpha-n-1}$.

Avem

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)a^n(ax+b)^{\alpha-n})' =$$

$$= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)a^{n+1}(a+b)^{\alpha-n-1}$$

Aşadar, avem

$$((ax+b)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)a^n(ax+b)^{\alpha-n} \quad (4.4)$$

Cazuri particulare. 1. Dacă $\alpha = n$, atunci din (4.4) găsim $((ax+b)^n)^{(n)} = n!a^n$, de unde pentru $a = 1$ şi $b = 0$ obţinem $(x^n)^{(n)} = n!$.

2. Dacă $\alpha = -1$, atunci din (4.4) obţinem

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

3. Dacă $\alpha = \frac{1}{2}$, atunci din (4.4) obţinem

$$(\sqrt{ax+b})^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\frac{\sqrt{ax+b}}{(ax+b)^n}, n \geq 2.$$

Exemplul 4.1.2. (Formula lui Leibniz.) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii de n ori derivabile pe D. Atunci are loc egalitatea

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x),$$

pentru orice $x \in D$, numită formula lui Leibniz.

Avem $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g^{(0)}(x) + f^{(0)}(x)g'(x)$, pentru orice $x \in D$, deci egalitatea este adevărată pentru $n = 1$.

Presupunem egalitatea adevărată pentru $n = k$ şi să demonstrăm că este adevărată şi pentru $n = k + 1$.

Putem scrie

$$(fg)^{(k+1)}(x) = ((fg)^{(k)})'(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{(k-i)}(x) g^{(i)}(x)\right)' =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left[f^{(k-i+1)}(x)g^{(i)}(x) + f^{(k-i)}(x)g^{(i+1)}(x)\right] =$$

$$= C_k^0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x) + [C_k^0 + C_k^1] f^{(k)}(x)g^{(1)}(x) +$$
$$+ [C_k^1 + C_k^2] f^{(k-1)}(x)g^{(2)}(x) + \ldots + [C_k^{k-1} + C_k^k] f^{(1)}(x)g^{(k)}(x) +$$
$$+ C_k^k f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x).$$

Deoarece $C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1$, $C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$ şi $C_k^{i-1} + C_k^i = C_{k+1}^i$, $i \leq k$, egalitatea precedentă conduce la

$$(fg)^{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i f_{(x)}^{(k+1-i)} \cdot g_{(x)}^{(i)},$$

ceea ce trebuia demonstrat. Aşadar, formula lui Leibniz este adevărată.

4.2 Proprietăţi de bază ale funcţiilor derivabile pe un interval

Definiţia 4.2.1 *Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie. Un punct $x_0 \in A$ se numeşte* **punct de maxim local (sau relativ)** *al funcţiei f dacă există o vecinătate $V(x)$ a lui x_0 aşa încât $f(x) \leq f(x_0)$, pentru orice $x \in V(x_0) \cap A$.*

Un punct $x_0 \in A$ se numeşte **punct de minim local (sau relativ)** *dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0 aşa încât $f(x) \geq f(x_0)$, pentru orice $x \in V(x_0) \cap A$.*

Pucntele de maxim sar minim local ale funcţiei f se numesc **puncte de extrem relativ (sau local)** *ale funcţiei f, iar valorile funcţiei în punctele sale de extrem se numesc* **extreme** *ale funcţiei f.*

Teorema 4.2.1 (Teorema lui Fermat). *Fie I un interval al lui $\mathbb{R}$ şi fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$. Dacă x_0 este un punct de extrem local interior al intervalului I şi f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.*

Demonstraţie. Să presupunem că x_0 este un punct de maxim local pentru f, adică există o vecinătate $V(x_0)$ a punctului x_0 astfel ca $f(x) \leq f(x_0)$, pentru orice $x \in V(x_0) \cap I$. Atunci, pentru $x \in V(x_0) \cap I$ cu $x < x_0$ putem scrie

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \tag{4.5}$$

iar pentru $x \in V(x_0) \cap I$ cu $x > x_0$ avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{4.6}$$

Cum f este derivabilă în punctul interior $x_0 \in I$, deducem că există $f'_s(x_0)$, $f'_d(x_0)$ şi $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$. Ţinând seama de aceasta şi trecând la limită în (4.5) şi (4.6), obţinem, pe de o parte că $f'(x_0) = f'_s(x_0) \leq 0$, iar, pe de altă parte, că $f'(x_0) = f'_d(x_0) \geq 0$. De aici, rezultă că $f'(x_0) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţia 4.2.1 *Teorema lui Fermat dă numai o condiţie necesară dar nu şi suficientă pentru existenţa punctelor de extrem. Se poate întâmpla ca într-un punct derivata să se anuleze fără ca punctul respectiv să fie punct de extrem local. Rădăcinile derivatei unei funcţii se numesc* **puncte critice** *sau* **puncte staţionare** *pentru funcţia respectivă.*

Observaţia 4.2.2 *Geometric, teorema lui Fermat afirmă că graficul unei funcţii derivabile are tangentă paralelă cu axa* Ox *în punctele de extrem interioare intervalului de definiţie a funcţiei.*

Teorema 4.2.2 (Teorema lui Rolle). *Fie funcţia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, unde* $a, b \in \mathbb{R}$ *şi* $a < b$*. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

i) f *este continuă pe* $[a,b]$*,*

ii) f *este derivabilă pe* (a,b)*,*

iii) $f(a) = f(b)$*,*

atunci există un punct $c \in (a,b)$ *aşa încât* $f'(c) = 0$*.*

Demonstraţie. Dacă f este constantă pe $[a,b]$, atunci $f' = 0$ pe (a,b) şi deci orice punct $c \in (a,b)$ satisface cerinţa $f'(c) = 0$.

Să admitem acum că f nu este constantă pe $[a,b]$. Cum f este continuă pe intervalul compact $[a,b]$, conform Corolarului 3.4.3. rezultă că f este mărginită şi îşi atinge marginile. Dacă $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ şi $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, atunci există $x_1 \in [a,b]$ şi $x_2 \in [\,a,b]$ aşa încât $f(x_1) = m$ şi $f(x_2) = M$. Cum f nu este constantă pe $[a,b]$ deducem că $m < M$. Se observă că x_1 şi x_2 nu pot fi ambele situate în extremităţile intervalului $[a,b]$. Într-adevăr, dacă am presupune că $x_1 = a$ sau $x_1 = b$, cum $f(a) = f(b)$, din $f(x_1) = f(a) = m < M = f(x_2)$ rezultă că x_2 nu poate coincide nici cu a şi nici cu b, deci $x_2 \in (a,b)$. Atunci, conform Teoremei lui Fermat, avem $f'(x_2) = 0$ şi deci există $c = x_2 \in (a,b)$ aşa ca $f'(c) = 0$.

Observaţia 4.2.3 *Geometric, teorema lui Rolle afirmă că în condiţiile din enunţul teoremei există cel puţin un punct al graficului funcţiei* f*, care nu coincide cu extremităţile, în care tangenta este paralelă cu axa* Ox*.*

Observaţia 4.2.4 *Dacă în teorema lui Rolle* $f(a) = f(b) = 0$*, atunci rezultă că între două rădăcini* a, b *ale funcţiei* f *există cel puţin o rădăcină* c *a derivatei.*

Observaţia 4.2.5 *Între două rădăcini reale consecutive ale derivatei unei funcţii pe un interval se află cel mult o rădăcină reală a funcţiei.*

Într-adevăr, fie $c_1 < c_2$ două rădăcini consecutive ale derivatei. Să presupunem că există două răcini reale diferite x_1 şi x_2 ale funcţiei, $f(x_1) = f(x_2) = 0$, $c_1 < x_1 < x_2 < c_2$. După teorema lui Rolle între $x_!$ şi x_2 trebuie să existe o rădăcină a derivatei, ceea ce nu se poate, c_1 şi c_2 fiind rădăcini consecutive ale derivatei.

Această observaţie permite să separăm rădăcinile reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$, dacă se cunosct rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$. Fie $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_k$ rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$ aşezate în ordine crescătoare pe intervalul $[a, b]$. Formăm **şirul lui Rolle**

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_k), f(b).$$

Conform observaţiei 4.2.5, în fiecare interval $(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_k, b)$ există cel mult o rădăcină a funcţiei. Există o rădăcină pe unul din aceste intervale numai dacă funcţia ia valori de semne contrare la capetele intervalului respectiv. Prin urmare, ecuaţia $f(x) = 0$ are atâte rădăcini reale în $[a, b]$ câte variaţii de semn are şirul lui Rolle.

Teorema 4.2.3 (Teorema lui Cauchy; a doua teoremă de medie a calculului diferenţial). *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *două funcţii care verifică condiţiile:*

i) f, g *sunt continue pe* $[a, b]$*.*

ii) f, g *sunt derivabile pe* (a, b)*.*

iii) $g'(x) \neq 0$ *pentru orice* $x \in (a, b)$*.*

Atunci există un punct $c \in (a,b)$ astfel ca

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstraţie. Observăm că $g(b) \neq g(a)$ deoarece în caz contrar, conform Teoremei lui Rolle, aplicată funcţiei g, ar exista $\xi \in (a,b)$ cu $g'(\xi) = 0$, ceea ce este în contradicţie cu condiţia (iii) din enunţ.

Acum, considerăm funcţia auxiliară

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x), \quad x \in [a,b],$$

care este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b), cu

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x), \quad x \in (a,b)$$

şi $h(a) = h(b)$. Deci, Teorema lui Rolle este aplicabilă funcţiei h, ceea ce implică existenţa unui punct $c \in (a,b)$ aşa că $h'(c) = 0$, echivalentă cu

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Observaţia 4.2.6 *Teorema lui Cauchy ne permite să deducem aşa numitele* **"Reguli ale lui l'Hospital"** *(François Guillaume Antoine de l'Hospital – 1696) de aflare a limitelor de funcţii în cazul nedeterminărilor $\frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$.*

Prima regulă a lui l'Hospital. *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $f, g : I \to \mathbb{R}$. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

i) funcţiile f şi g sunt derivabile pe $I - \{x_0\}$;

ii) există $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$;

iii) $g'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I - \{x_0\}$;

iv) există $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci are loc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Pentru demonstraţie considerăm funcţiile

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ dacă } x \in I - \{x_0\} \\ 0 & , \text{ dacă } x = x_0 \end{cases}$$

şi

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{ dacă } x \in I - \{x_0\} \\ 0 & , \text{ dacă } x = x_0 \end{cases}$$

Aceste funcţii sunt continue pe I derivabile pe $I - \{x_0\}$ şi $G'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I - \{x_0\}$. Aplicăm teorema lui Cauchy funcţiilor $F(x)$ şi $G(x)$ pe intervalul compact $[x_0, x]$ şi avem

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad x_0 < c < x.$$

De aici, utilizând condiţia iv), prin trecere la limită obţinem:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

A doua regulă a lui l'Hospital. *Fie* $a > 0$ *şi* $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *două funcţii. Dacă sunt îndeplinite condiţiile:*

i) funcţiile f *şi* g *sunt derivabile pe* $(a, +\infty)$*;*

ii) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$*;*

iii) $g'(x) \neq 0$ *pentru orice* $x > a$*;*

iv) există $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\overline{\mathbb{R}}$, *atunci are loc egalitatea*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pentru demonstraţie se face schimbarea de variabilă $x=1/t$ *şi se aplică prima regulă a lui l'Hospital pe intervalul* $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ *pentru* $x\to 0$.

Observaţia 4.2.7 *Dacă avem* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=+\infty$, *atunci scriem*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}}$$

şi se aplică prima regulă a lui l'Hospital.

Observaţia 4.2.8 *Cazurile de nedeterminare* $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 *se reduc prin transformări (operaţii) algebrice la situaţiile* $\frac{0}{0}$ *sau* $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 4.2.4 (Teorema lui Lagrange – teorema creşterilor finite – prima formulă de medie a calculului diferenţial). *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *o funcţie care satisface condiţiile:*

i) f *este continuă pe* $[a,b]$;

ii) f *este derivabilă pe* (a,b),

atunci există un punct $c\in(a,b)$ *aşa ca*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Demonstraţie. Luăm în Teorema lui Cauchy funcţia $g(x)=x$, $x\in[a,b]$.

Observaţia 4.2.9 *Dacă funcţia f are derivată nulă pe un interval I, atunci f este constantă pe I.*

Demonstraţie. Fie x_0 un punct fixat din I şi $x \in I$ un punct arbitrar. Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_0, x]$ (sau $[x, x_0]$) şi rezultă că există $c \in (x_0, x)$ (sau (x, x_0)) aşa încât

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Cum $f'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in I$, rezultă că $f(x) = f(x_0)$, oricare ar fi $x \in I$, şi deci f este cosntantă pe intervalul I.

Observaţia 4.2.10 *Dacă două funcţii sunt derivabile pe un interval I şi derivatele sunt egale pe acest interval, atunci diferenţa lor este o constantă.*

Demonstraţie. Dacă $f'(x) = g'(x)$ pentru orice $x \in I$, atunci rezultă că $(f - g)'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in I$. Atunci, pe baza Observaţiei 4.2.9, rezultă, $(f - g)(x) = k$, oricare ar fi $x \in I$, adică $f(x) - g(x) = k$, pentru orice $x \in I$.

Observaţia 4.2.11 *Fie f o funcţie derivabilă pe intervalul I.*

i) Dacă $f'(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in I$, atunci f este crescătoare pe I;

ii) Dacă $f'(x) \leq 0$, oricare ar fi $x \in I$, atunci f este descrescătoare pe I;

iii) Dacă $f'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I;

iv) Dacă $f'(x) < 0$, oricare ar fi $x \in I$, atunci f este scrict descrescătoare pe I.

Demonstraţie. Vom justifica numai punctul i), celelalte cazuri demonstrându-se în mod analog.

Fie x_1, x_2 două puncte arbitrare din I aşa încât $x_1 < x_2$.

Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$ şi rezultă că există $c \in (x_1, x_2)$ aşa încât $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

Cum $f'(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in I$, rezultă că $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, adică $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Aşadar, f este crescătoare pe I.

Afirmaţiile de la punctele i) şi ii) ale Observaţiei admit şi reciproce, în timp ce afirmaţiile de la punctele iii) şi iv) nu mai admit reciproce.

Observaţia 4.2.12 *Fie f o funcţie continuă pe un interval I şi $x_0 \in I$. Dacă f este dervabilă pe $I - \{x_0\}$ iar derivata sa f' are limită (finită sau infinită) în punctul x_0, atunci există derivata funcţiei f şi în punctul x_0 şi în plus*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$

Pentru demonstraţie se aplică teorema lui Lagrange pe intervalele $[x, x_0]$ şi $[x_0, x]$ şi se face $x \to x_0$.

Observaţia 4.2.13 *Dacă funcţia f are derivata mărginită pe I, atunci f este funcţia lipschitziană pe I.*

Demonstraţie. Fie x_1, x_2 două puncte arbitrare diferite din I. Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$ (sau $[x_2, x_1]$) şi există $c \in (x_1, x_2)$ aşa încât $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$. Cum $|f'(x)| \leq M$, $M > 0$, oricare ar fi $x \in I$, avem

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)(x_1 - x_2)| = |f'(c)|\,|x_1 - x_2| \leq M|x_1 - x_2|,$$

ceea ce ne arată că f este lipschitziană pe I.

Teorema 4.2.5 (Teorema lui Darboux). *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe acel interval.*

Demonstraţie. Fie $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$. Să presupunem că $f'(x_1) < f'(x_2)$ şi $\lambda \in (f'(x_1), f'(x_2))$. Considerăm funcţia auxiliară $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda x$, care verifică inegalităţile: $g'(x_1) < 0$ şi $g'(x_2) > 0$.

Deoarece g este derivabilă pe $[x_1, x_2] \in I$ rezultă că g este continuă pe compactul $[x_1, x_2]$ deci îşi atinge marginile. Atunci există $c \in [x_1, x_2]$ aşa încât $g(c) = \min\limits_{x\in[x_1,x_2]} g(x)$. Să arătăm că $c \neq x_1$ şi $c \neq x_2$. Din $g'(x_1) < 0$ rezultă că există $\varepsilon > 0$ aşa încât $\frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} < 0$, pentru orice $x \in (x_1, x_1+\varepsilon)$, de unde obţinem că $g(x) < g(x_1)$, pentru orice $x \in (x_1, x_1+\varepsilon)$. Această ultimă inegalitate ne arată că g îşi atinge marginea inferioară într-un punct diferit de x_1; deci $c \neq x_1$. În mod analog, demonstrăm că $c \neq x_2$. Acum, aplicând teorema lui Fermat funcţiei g pe intervalul $[x_1, x_2]$ rezultă că $g'(c) = 0$, adică $f'(c) = \lambda$.

Teorema 4.2.6 (Teorema lui Taylor). *Fie I un interval deschis al lui $\mathbb{R}$. Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă de $n+1$ ori pe I, atunci pentru orice două puncte $x, x_0 \in I$, cu $x \neq x_0$, există un punct $c \in (x, x_0)$ (sau (x_0, x)) aşa încât*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)},$$

numită formula lui Taylor.

Demonstraţie. Ne propunem să scriem pe f sub forma:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + K(x-x_0)^{(n+1)}, \quad (\forall)x \in I, \tag{4.7}$$

unde K este un număr real. Considerăm funcţia auxiliară

$$g(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + K(x-t)^{(n+1)}, \quad (\forall)t \in I.$$

Observăm că g este derivabilă pe I, $g(x) = f(x)$, $g(x_0) = f(x_0)$. Aşadar, funcţia g satisface condiţiile teoremei lui Rolle pe $[x, x_0]$ (sau $[x_0, x]$). Atunci există un punct $c \in (x, x_0)$ (sau (x_0, x)) aşa încât $g'(c) = 0$.

Dar

$$g'(t) = f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - K(n+1)(x-t)^n,$$

$(\forall)t \in I$, de unde

$$g'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - K(n+1)(x-t)^n, \quad (\forall)t \in I.$$

De aici obţinem $g'(c) = 0$, adică

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = K(n+1)(x-c)^n,$$

de unde găsim

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

care înlocuită în (4.7) conduce la formula lui Taylor.

Observaţia 4.2.14 *Formula lui Taylor este o formulă de aproximare a funcţiei f prin polinomul*

$$(T_n f)(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

numit **polinomul lui Taylor de grad n asociat funcţiei** f. *Expresia*

$$(v_n t)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

se numeşte **restul sub forma Lagrange al formulei lui Taylor.**

Proprietatea esenţială a polinomului lui Taylor este dată de relaţiile:

$$(T_n f)(x_0) = f(x_0); \quad (T_n f)'(x_0) = f'(x_0);$$
$$(T_n f)^{(2)}(x_0) = f^{(2)}(x_0); \ldots ; (T_n f)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Observaţia 4.2.15 *Dacă în formula lui Taylor considerăm $x_0 = 0$, atunci obţinem Formula lui MacLaurin, adică*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Observaţia 4.2.16 *Dacă în formula lui Taylor considerăm $n = 0$, atunci obţinem formula creşterilor finite a lui Lagrange (v.Teorema 4.2.4).*

Observaţia 4.2.17 *Punctul c din intervalul deschis determinat de punctele x şi x_0 depinde de x, x_0 şi n. Punctul c se poate scrie şi sub forma $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, unde $\theta \in (0, 1)$.*

Exemple. 4.2.1. Funcţia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, este de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}$ iar $f^{(k)}(x) = e^x$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Cum $f^{(k)}(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, formula MacLaurin pentru e^x are forma:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

4.2.2. Funcţia $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (-1, \infty)$, este indefinit derivabilă pe $(-1, \infty)$. Cum

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad (\forall)x \in (-1, \infty)$$

(vezi Exemplul 4.1.1), avem $f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$, $k \in \mathbb{N}^*$ şi formula de tip MacLaurin

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} +$$
$$+(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$(\forall) x \in (-1, \infty)$, $\theta \in (0,1)$.

4.3 Diferenţiala unei funcţii reale

În acest paragraf introducem noţiunea de diferenţială relativă la o funcţie reală de o variabilă reală.

Definiţia 4.3.1 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pe intervalul deschis I.*

Spunem că f este **diferenţiabilă în punctul** $x_0 \in I$ *dacă există numărul real A, care depinde de f şi x_0, şi o funcţie $\alpha : I \to \mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ astfel încât*

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \alpha \tag{4.8}$$

pentru orice $x \in I$.

Teorema 4.3.1 *Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, interval deschis, este diferenţiabilă în punctul $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă f este derivabilă în x_0.*

Demonstraţie. Să admite că f este diferenţiabilă în punctul $x_0 \in I$. Atunci există $A \in \mathbb{R}$ şi o funcţie $\alpha : I \to \mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ astfel încât să aibă loc (4.8).

Considerând $x \neq x_0$ şi împarţind în (4.8) ambii membrii prin $x - x_0$ obţinem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} A + \alpha(x), \quad (\forall) x \in I - \{x_0\}.$$

Cum $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, rezultă că există $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$, adică f este derivabilă în punctul x_0 şi $A = f'(x_0)$.

Reciproc, să presupnem că f este derivabilă în punctul x_0. Din definiţia derivatei lui f în punctul x_0 avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Considerăm funcţia $\alpha : I \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{, pentru } x \in I - \{x_0\} \\ 0 & \text{, pentru } x = x_0. \end{cases}$$

Se observă că $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$, adică α este continuă în x_0. Din definiţia lui α pentru $x \neq x_0$ avem

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0),$$

egalitate evident verificată şi pentru $x \equiv x_0$. Rezultă că f este diferenţiabilă în x_0 şi $A = f'(x_0)$.

Observaţia 4.3.1 *Teorema 4.3.1 exprimă faptul că pentru funcţiile reale de o variabilă reală noţiunile de diferenţiabilitate şi derivabilitate într-un punct sunt echivalente.*

Observaţia 4.3.2 *Dacă f este diferenţiabilă în punctul x_0, atunci pentru valori mici ale lui $h = x - x_0$ diferenţa $f(x) - f(x_0)$ se poate aproxima cu $f'(x_0)h$, adică*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h \tag{4.9}$$

Definiţia 4.3.2 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval deschis din $\mathbb{R}$, derivabilă în punctul $x_0 \in I$. Funcţia liniară şi omogenă*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(h) = f'(x_0)h, \quad h \in \mathbb{R},$$

se numeşte **diferenţiala funcţiei** f *în punctul* x_0 *şi se notează prin* $df(x_0)$, *adică*

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h. \tag{4.10}$$

Acum, relaţia (4.9) se mai poate scrie

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)(h).$$

Diferenţiala lui f într-un punct oarecare $x \in I$ o notăm prin $df(x)$.

Dacă în (4.10) alegem, în particular, ca f aplicaţia identică, atunci diferenţiala lui f într-un punct $x \in I$ este $df(x)(h) = h$, $(\forall)h \in \mathbb{R}$, adică $h = d(x)(h)$. Folosind notaţia simplă $d(x) = dx$, avem $dx(h) = h$. Revenind cu acest rezultat în (4.10), obţinem

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h), \ (\forall)h \in \mathbb{R},$$

de unde găsim

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{4.11}$$

Din (4.11) rezultă şi scrierea

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

care constituie exprimarea derivatei lui f în limbajul diferenţialelor.

Ţinând seama de (4.11), obţinem imediat din regulile de derivare următoarele reguli de diferenţiere: dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile pe intervalul deschis $I \subset \mathbb{R}$, atunci

$$d(f + g) = df + dg; \quad d(\lambda t) = \lambda df, \quad d(fg) = gdf + fdg,$$

iar dacă, în plus $g \neq 0$, atunci

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

Teorema 4.3.2 (diferenţiala unei funcţii compuse). *Fie I şi J două intervale deschise ale lui $\mathbb{R}$ şi fie $u : I \to J$ şi $f : J \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile respectiv pe I şi J. Atunci*

$$df(u) = f'(u)du.$$

Demonstraţie. Avem

$$df(u(x)) = (f(u(x)))'dx = f'(u(x)) \cdot u'(x)dx = f'(u(x)) \cdot du(x),$$

oricare ar fi $x \in I$.

Definiţia 4.3.3 *Numim* **diferenţiala de ordinul doi** *a funcţiei f în punctul x, notată prin $d^2f(x)$, expresia $d(df(x))$, adică avem*

$$d^2f(x) = d(df(x)).$$

În general, $d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x))$. Avem:

$$d^2f(x) = d(f'(x)dx) = d(f'(x)) \cdot dx + f'(x)d(dx) =$$

$$= f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2,$$

deoarece $d(dx) = 0$ (derivata de ordinul doi a funcţiei identice este egală cu 0).

Prin inducţie matematică obţinem că $d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n$. Se mai zice că diferenţialele de ordin superior sunt invariante faţă de ordinul de derivare.

Această proprietate nu se mai păstrează pentru diferenţiala funcţiilor compuse.

4.4 Aplicaţiile derivatei în economie

Economia este considerată cea mai ”exactă” dintre ştiinţele sociale, [2], deoarece, în general, procesele economicce sunt studiate prin modele matematice. În §3.2 am văzut că relaţiile dintre diferite mărimi economice se pot exprima prin funcţii. Pentru a studia variaţia unei astfel de funcţii şi a trasa graficul ei se folosesc derivatele funcţiei de ordinul întâi şi doi.

În domeniul economic în descrierea variaţiei mărimii y în raport cu o altă mărime x, dată prin funcţia $y = f(x)$, $x \in I$, I interval din $\mathbb{R}$, se utilizează conceptul de medie şi conceptul de marginal. (vezi partea introductivă la capitolul 4).

Definiţia 4.4.1 *Numim* **valoarea medie a lui** f **pe intervalul** $[x, x+h] \subset I, h > 0$, *notată cu* $f(x)$, *raportul*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Exemple: 4.4.1. Fie $P(t)$ numărul de unităţi produse întrun flux tehnologic după t ore de la începerea proccesului. Valoarea medie a lui $P(t)$ într-un interval de h ore este

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \overline{P(t)}$$

şi se numeşte **producţie medie**.

4.4.2. Dacă funcţia de cost total pentru realizarea a x unităţi dintr-un produs este $C(x) = \frac{x^2}{9} + x + 100$, $x \geq 1$ să stabilim câte unităţi trebuie realizate pentru a avea cel mai scăzut preţ mediu pe unitate de produs.

Trebuie să studiem variaţia funcţiei preţ mediu

$$\overline{C(x)} = \frac{C(x)}{x} = \frac{x}{9} + \frac{100}{x}, x \geq 1.$$

Cum $\overline{C(x)}' = \frac{1}{9} - \frac{100}{x^2}$ are rădăcina $x = 30$, din tabelul de variaţie

x	1		30		∞
$\overline{C}'(x)$		$- - -$	0	$+ + +$	
$\overline{C(x)}$	$\frac{910}{9}$	$\searrow$	$\frac{23}{3}$	$\nearrow$	∞

rezultă că vom avea cel mai scăzut preţ mediu dacă se produc 30 unităţi de produs.

Definiţia 4.4.2 *Numim* **valoare marginală** *a funcţiei* $f : I \to \mathbb{R}$, *în punctul* $x \in I$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Exemplul 4.4.3. În cazul Exemplului 4.4.1, valoarea marginală a producţiei $P(t)$ este **productivitatea**

$$P'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P(t+h)-P(t)}{h}.$$

Definiţia 4.4.3 *Numim* **variaţia relativă** *a funcţiei* $f : I \to \mathbb{R}$ *în punctul* $x \in I$ *raportul*

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}, \quad h > 0.$$

Definiţia 4.4.4 *Numim* **ritmul mediu** *de variaţie a funcţiei* $f : I \to \mathbb{R}$ *în punctul* $x \in I$ *raportul* $\frac{\Delta f(x)}{f(x)} \Big/ h$ *şi se notează cu* $R_{f,m}$.

Definiţia 4.4.5 *Numim* **ritmul local (marginal)** *a funcţiei* $f : I \to \mathbb{R}$ *în punctul* x *limita* $\lim\limits_{h\to 0} R_{f,m}$, *adică*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \Big/ h = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x)}{h} \cdot \frac{1}{f(x)} = \frac{f'}{f} = (\ln f)',$$

care este derivata logaritmică a lui f. *Ritmul local a lui* f *în* x *se notează prin* $R_{f,x}$.

Definiţia 4.4.6 *Numim* **elasticitatea medie** *a funcţiei* $f : I \to \mathbb{R}$ *în punctul* x, *notată prin* E_m, *raportul variaţiilor relative ale lui* $f(x)$ *şi* x, *adică*

$$E_{f,m} = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \Big/ \frac{h}{x} = \frac{\Delta f(x)}{h} \cdot \frac{x}{f(x)}.$$

Definiţia 4.4.7 *Numim* **elasticitatea locală (marginală)** *a funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$, în punctul x limita elasticităţii medii când $h \to 0$. Ea se notează prin $E_{f,m}$.*

Avem

$$E_{f,m} = \lim_{h\to 0} \frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\Delta f(x)}{h} = \frac{x}{f} \cdot f' = x(\ln f)' = \frac{(\ln f)'}{(\ln x)'}.$$

Proprietatea importantă a elasticităţii unei funcţii este aceea că ea este ca mărime independentă de unităţile de măsură în care au fost măsurate variabilele $f(x)$ şi x.

Exemplul 4.4.4. Fie $x = ap+b$, $a > 0$, $b > 0$ o funcţie cerere pentru o marfă de preţ p. Elasticitatea marginală a cererii în p este

$$E_{ap+b,p} = p(\ln(ap + b))' = \frac{ap}{ap + b}.$$

Cum $E_{ap+b,p} < 1$, rezultă că la o cerere de tip liniar la o creştere relativă a preţului corespunde o creştere relativă mai mică pentru cerere.

Observaţia 4.4.1 *Noţiunile introduse în acest paragraf se transpun uşor la noţiunile din domeniul economic. Astfel, avem cost mediu, cost marginal, elasticitatea costului, cerere medie, cerere marginală, elasticitatea cererii etc.*

4.5 Probleme

1. Studiaţi derivabilitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

2. Să se determine a şi b reale aşa încât funcţia

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x = \begin{cases} \ln^3 x & x \in (0, e] \\ ax + b & , x > e \end{cases})$$

să fie derivabilă pe $(0, \infty)$.

3. Studiaţi derivabiltiatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) =$

$\max\{x, x^2, x^3\}$.

4. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + \sqrt{x^2+1})^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, verifică egalitatea

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - \alpha^2 f(x) = 0, \quad (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

5. Fie funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sqrt[n]{x}} + e^{-\sqrt[n]{x}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Arătaţi că are loc egalitatea

$$x^{\frac{2n-2}{n}} f''(x) + \frac{(n-1)}{n} x^{\frac{n-2}{n}} f'(x) - \frac{1}{n^2} f(x) = 0,$$

oricare ar fi $x > 0$.

6. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = me^{4x} + ne^{3x}$, $m, n \in \mathbb{R}$, verifică egalitatea

$$f^{(3)}(x) - 8f''(x) + 19f'(x) - 12f(x) = 0,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

7. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şi $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x}$. Arătaţi că există un punct în care graficele corespunzătoare celor două funcţii sunt tangente şi scrieţi ecuaţia tangentei comune în punctul respectiv.

8. Calculaţi derivatele de ordinul n pentru funcţiile:

a) $f(x) = \frac{2n-3}{x^2-4x+3}$, $x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$;

b) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $x > \frac{1}{2}$;

e) $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$;

f) $f(x) = xe^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

9. Cercetaţi valabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 9, & x \in [-1, 0] \\ x^3 + 9, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

10. Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile pe intervalul deschis I. Să presupunem că $a, b \in I$, $a < b$ şi $f(a) = f(b) = 0$. Arătaţi că există un punct $c \in (a, b)$ aşa încât $f'(c) + f(c)g'(c) = 0$.

11. Să se arate că dacă f, g, h sunt trei funcţii continue pe $[a, b]$ şi derivabile pe (a, b), atunci există $c \in (a, b)$ aşa încât

$$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0$$

12. Aplicaţi Teorema lui Lagrange funcţiei $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1, 3] \\ \dfrac{x^2 + 9}{6}, & x \in (3, 4]. \end{cases}$$

13. Să se determine valoarea lui c care intervine în Teorema lui Cauchy aplicată la perechea de funcţii

$$f, g : [1, e] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln x, g(x) = \frac{e}{x}$$

14. Să se arate că funcţiile $f, g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \arcsin(\mathrm{tg} x)$ şi $g(x) = \mathrm{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$ diferă printr-o cosntantă.

15. Să se arate că

$$\arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} - 2\mathrm{arctg} x = 0,$$

oricare ar fi $x \geq 0$.

16. Demonstraţi inegalităţile:

a) $\ln x \leq \frac{x}{e}$, pentru orice $x > 0$;

b) $\frac{m-n}{m} < \ln m - \ln n < \frac{m-n}{n}$, dacă $0 < n < m$;

c) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, dacă $x > 0$;

d) $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$, $x > 1$;

e) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

17. Utilizând regulile lui l'Hospital, calculaţi limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{\ln(x+1)} - \dfrac{1}{x}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2^x+3^x+\ldots+n^x}{n-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x^2+2x}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x^2-3x+2)e^{\frac{1}{x-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x[\ln^2(x+1)-\ln^2 x]}{\ln x}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\dfrac{1}{\ln(x-1)} - \dfrac{1}{x-2}\right)$;

g) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)^{\frac{x^2-3x+2}{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\ln x)$;

i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $m, n \in \mathbb{N}$.

18. Scrieţi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 5$ după puterile lui $x - 1$.

19. Scrieţi formula lui Mac-Laurin pentru funcţiile:

a) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \in (-1, 1)$;

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x > -\frac{1}{2}$.

20. Utilizând formula Mac-Laurin, calculaţi cu trei zecimale exacte $\sqrt[3]{35}$ şi $\ln 2$.

21. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de n ori derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ $(n \geq 2)$, astfel încât $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ şi $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Arătaţi că:

a) dacă n este par, atunci x_0 este punct de extrem local şi anume dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de maxim local iar dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local;

b) dacă n este impar, atunci x_0 nu este punct de extrem.

22. Să se arate că polinomul

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

nu poate avea rădăcini multiple.

23. Reprezentaţi grafic funcţiile:

a) $f(x) = (x-1)e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \sqrt{(x+1)x} + \sqrt{(x+1)(x+2)}$, $x \in (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [0, \infty)$;

d) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, $x > 0$, $x \neq 1$;

e) $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$, $x \neq 0$;

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

g) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$, $x \neq 0$.

24. Calculaţi diferenţialele de ordinele întâi şi doi pentru funcţiile:

a) $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $x \in (-1, 1)$;

c) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$;

d) $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

25. Aflaţi punctele de extrem pentru funcţiile:

a) $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$;

c) $f(x) = x \ln x$, $x > 0$;

d) $f(x) = xe^{-e}$, $x \in \mathbb{R}$.

26. Calculaţi elasticitatea funcţiilor:

a) $f(x) = ax^\alpha$, $x > 0$;

b) $f(x) = ae^{bx}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = x^a e^{-bx}$, $x > 0$.

27. Aflaţi ritmul mediu de variaţie a funcţiei

$$f(x) = \frac{3x + 1}{2x - 1}, \quad x > 1$$

când x variază de la $x = 2$ la $x = 3$; $2,5$; $2,1$ şi $2,05$. Comparaţi aceste ritmuri medii cu ritmul marginal în $x = 2$.
28. Ştiind că funţia costurilor totale este

$$f(x) = \frac{ax^2(x + b)}{x + c} + d,$$

$a, b, c, d > 0$, $b < c$, $x \in \mathbb{R}$, să se exprime costul mediu şi costul marginal în funcţie de x.

29. Ştiind că productivitatea corespunzătoare unui produs în cadrul unei echipe ce lucrează de la orele 7 la orele 15 urmează o lege de forma $f(t) = at$, $a > 0$, aflaţi numărul de unităţi realizate la orele 13.

4.6 Test de verificare a cunoştinţelor nr. 4

1. Definiţi următoarele noţiuni:

   a) Derivata unei funcţii reale de o variabilă reală;

   b) Diferenţiala unei funcţii reale de o variabilă reală.

2. Enunţaţi:

   a) Teorema lui Fermat;

   b) Teorema lui Rolle;

   c) Teorema lui Lagrange;

   d) Teorema (formula) lui Taylor;

   c) Teorema lui Cauchy.

3. Studiaţi derivabilitatea funcţiei:

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$;

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1) \cdot \arcsin \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 + 1}}$ în punctul $x = 0$.

4. Numerele $a_0, a_1, ..., a_n$ verifică condiţia $\dfrac{a_0}{1} + \dfrac{2a_1}{2} + \dfrac{2^2 a_2}{3} + ... + \dfrac{2^n a_n}{n+1} = 0$. Să se arate că funcţia $f : [1, e^2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + ... + a_n \ln^n x$ are cel puţin un zero în intervalul $(1, e^2)$.

5. a) Se consideră fincţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \ln(1 + t)$. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[0, x]$, $x > 0$, să se arate că oricare ar fi $x > 0$ are loc relaţia: $x - (1 + x) \cdot \ln(1 + x) < 0$;

   b) Să se arate că funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ este monoton descrescătoare.

6. Utilizând teorema lui Cauchy să se demonstreze inegalitatea:
$$\ln(1+x) > \frac{\mathrm{arctg}x}{1+x}\ , \qquad x > 0.$$

7. a) Precizaţi punctele de extrem local ale funcţiei:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \qquad f(x) = |x^2 - 1|.$$

   b) Determinaţi derivata de ordinul n, $n \in \mathbb{N}$, pentru funcţia $f(x) = \sin x$.

   c) calculaţi derivata de ordinul 20 a funcţiei
$$h(x) = x^3 \cdot \sin x.$$

8. Să se dezvolte după puterile lui x funcţia
$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}\ , \qquad f(x) = \ln(1+x).$$

9. Să se dezvolte $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, după puterile lui $x + 1$.

10. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât polinomul lui Taylor $T_n(x)$ în punctul $x_0 = 0$ asociat funcţiei $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \in [-1, \infty]$ să difere de funcţie cu mai puţin de $\dfrac{1}{16}$ în intervalul $[0, 1]$.

Capitolul 5

Integrarea funcţiilor reale

"Matematica constituie deci, sufletul invizibil al realizărilor practice"

(Petre Sergescu)

Acest capitol este dedicat introducerii noţiunilor de primitivă, integrală nedefinită, integrală definită şi prezentării proprietăţilor şi metodelor de calcul corespunzătoare.

5.1 Primitive

În Capitolul IV, s-a văzut că dacă $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval, este o funcţie dată, derivabilă pe I, atunci derivata ei $f : I \to \mathbb{R}$ se poate afla

Operaţia efectivă de aflare a lui f' se numeşte **derivare**.

Acum, ne punem o problemă inversă, adică având o funcţie dată $f : I \to \mathbb{R}$, să găsim o altă funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ aşa încât $F'(x) = f(x)$, $(\forall)x \in I$. Operaţia de aflare a lui F se va numi **integrare** sau **antiderivare**.

În continuare prin I vom nota un interval inclus în $\mathbb{R}$.

Definiţia 5.1.1 *Se spune că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, admite o* **primitivă** *pe I sau că este* **primitivalabilă** *pe I sau că este o* **derivată** *pe I dacă există funcţia $F : I \to \mathbb{R}$ derivabilă* *aşa încât $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in I$.*

Funcţia F se numeşte **primitivă** *sau* **antiderivată** *pentru funcţia f pe intervalul I.*

Evident că, dacă F este o primitivă a lui f pe intervalul I, atunci şi $F + K$, unde $K \in \mathbb{R}$, este o primitivă pentru f. Aceasta înseamnă că dacă f admite o primitivă, atunci ea are o infinitate de primitive.

Definiţia 5.1.2 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive pe I. Mulţimea tuturor primitivele lui f se numeşte* **integrala nedefinită** *a lui f şi se notează prin $\int f(x)dx$, adică avem*

$$\int f(x)dx = \{F | F : I \to \mathbb{R}, F \text{ primitivă a lui } f\}$$

Propoziţia 5.1.1 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitiva F pe I. Atunci are loc egalitatea de mulţimi*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

unde

$$C = \{g | g : I \to \mathbb{R}, g \text{ constantă}\}$$

Demonstraţie. Fie $G \in \int f(x)dx$, atunci $G'(x) = F'(x)$, de unde $G(x) = F(x) + k$, $k \in C$, deci $G \subset F(x) + C$. Reciproc, dacă $G \in F(x) + C$, atunci $G = F(x) + k$, $k \in C$ şi avem $G'(x) = F'(x) = f(x)$, $(\forall)x \in I$.

Aşadar $G \in \int f(x)dx$. Deci, avem $F(x)+C \subset \int f(x)dx$, ceea ce demonstrează egalitatea din enunţ.

Propoziţia 5.1.2 *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii care admit primitive pe I şi $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Atunci au loc afirmaţiile:*

i) $f + g$ admite primitive pe I şi

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

(integrala sumei este egală cu suma integralelor).

ii) αf admite primitive şi

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

(constanta de sub integrală iese în faţa ei)

Demonstraţie. i) Fie $F \in \int f(x)dx$ şi $G \in \int g(x)dx$. Atunci $H \overset{det}{=} F + G$ este derivabilă cu $H'(x) = F'(x) + G'(x) = = f(x) + g(x)$, oricare ar fi $x \in I$. Rezultă că $G \in \int g(x)dx$ şi deci $H \in \int f(x)dx + \int g(x)dx$. Am demonstrat astfel şi incluziunea $\int (f(x) + g(x))dx \subset \int f(x)dx + \int g(x)dx$, ceea ce trebuia demonstrat..

În mod analog se demonstrează şi ii).

Observaţia 5.1.1 *Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este primitivabilă pe intervalul I, atunci f are proprietatea lui Darboux.*

Aceasta rezultă din Teorema lui Darboux şi Definiţia 5.1.1.

Observaţia 5.1.2 *Orice primitivă a unei funcţii primitivabile $f : I \to \mathbb{R}^*$ este strict monotonă.*

Demonstraţie. Fie F o primitivă a funcţiei f. Cum f are proprietaeta Darboux, rezultă că $f > 0$ pe I sau $f < 0$ pe I. De aici rezultă că F este strict monotonă pe I.

Observaţia 5.1.3 *O funcţie primitivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ nu are discontinuităţi de prima speţă.*

Observaţia 5.1.4 *O funcţie monotonă discontinuă $f : I \to \mathbb{R}$ nu este primitivabilă.*

Veridicitatea acestei observaţii rezultă din 3.4.7. Deocamdată să admitem fără demonstraţie rezultatul.

Teorema 5.1.1 *Orice funcţie continuă $f : I \to \mathbb{R}$, este primitivabilă pe I.*

Propoziţia 5.1.3 *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este primitivabilă şi $g : I \to \mathbb{R}$ este de clasă $C^1(I)$, atunci fg este primitivabilă pe I.*

Demonstraţie. Fie $F : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f şi $H : I \to \mathbb{R}$, $H = \underline{+}g$. Atunci H este derivabilă şi $H' = F'g + Fg' = fg + Fg'$. Cum Fg' este continuă pe I rezultă că este primitivabilă pe I. Fie G o primitivă a lui Fg'. Atunci funcţia $H - G$ este derivabilă pe I cu

$$(H - G)' = H' - G' = f \cdot g,$$

adică fg este primitivabilă şi $H - G$ este o primitivă a sa.

5.2 Metode de aflare a primitivelor

În acest paragraf vom expune câteva din metodele de aflare a primitivelor.

Metoda directă. Ea are la bază faptul că operaţia de integrare este inversa operaţiei de derivare. Plecând de la formulele de derivare se găsesc formulele imediate de integrare. Astfel, se obţine tabelul de mai jos de integrale nedefinite.

	Funcţie	Integrala nedefinită
1.	$f : I \to \mathbb{R}, I \subset (0, \infty)$ $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
2.	$f : I \to \mathbb{R}, I \subset (0, \infty)$ sau $f(x) = x^{-1}, I \subset (-\infty, 0)$	$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$

3.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x$ $a>0, a\neq 1$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$ Dacă $a=e$, atunci $\int e^x dx = e^x + C$
4.	$f:I\to\mathbb{R}, I\subset\mathbb{R}-\{a,-a\}$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-a^2}, a>0$	$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=$ $=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
5.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}, a>0$	$\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}=$ $=\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{a}+C$
6.	$f:I\to\mathbb{R}, I\subset(-a,a), a>0$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$ $=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$
7.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$ $=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$
8.	$f:I\to\mathbb{R}, a>0$ $I\subset(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=$ $=\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert+C$
9.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{sh}x$ funcţia sinus hiperbolic	$\int \mathrm{sh}x\ dx=\mathrm{ch}x+C$
10.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$ funcţia cosinus hiperbolic	$\int \mathrm{ch}x\ dx=\mathrm{sh}x+C$

11. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ $\quad \int \sin x dx = -\cos x + C$
$f(x) = \sin x$

12. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ $\quad \int \cos x dx = \sin x + C$
$f(x) = \cos x$

13. $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + C$
$I \subset \mathbb{R} - \left\{ (2k+1) \left. \frac{\pi}{2} \right| k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

14. $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + C$
$I \subset \mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$

15. $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad \int \text{tg } x dx = -\ln |\cos x| + C$
$I \subset \mathbb{R} - \left\{ (2k+1) \left. \frac{\pi}{2} \right|, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \text{tg } x$

16. $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad \int \text{ctg } x dx = \ln |\sin x| + C$
$I \subset \mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \text{ctg } x$

Exemple. 5.2.1. Avem

$$\int (x^3 + 2\sqrt[3]{x} + 2 \sin x) dx =$$
$$= \int x^3 dx + 2 \int x^{\frac{1}{3}} dx + 2 \int \sin x dx =$$
$$= \frac{x^4}{4} + 2x^{\frac{4}{3}} \frac{3}{4} - 2 \cos x + C =$$
$$= \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2} x \sqrt[3]{x} - 2 \cos x + C$$

5.2.2.

$$\int \left(\frac{1}{x^2 - 3} + \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + 2 \arcsin x + C$$

Metoda integrării prin părţi. O altă metodă care permite determinarea primitivelor unor funcţii date este oferită de integrarea prin părţi, dată de:

Teorema 5.2.1 *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile pe I. Atunci*

i) fg' este primitivabilă dacă şi numai dacă $f'g$ este primitivabilă;

ii) dacă fg' este primitivabilă, atunci

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx,$$

numită **formula de integrare prin părţi.**

Demonstraţie. i) Ţinând seama că f şi g sunt derivabile, avem fg este derivabilă şi $(fg)' = f'g + fg'$ de unde rezultă imediat afirmaţia de la i).

ii) Fie $H \in \displaystyle\int f(x)g'(x)dx$. Atunci funcţia $F \overset{det}{=} fg - H$, este derivabilă cu $F' = (fg)' - H' = f'g$. Aşadar avem $H = fg + F \in f(x)g(x) - \displaystyle\int f'(x)g(x)dx$, adică

$$\int f(x)g'(x)dx \subset f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Reciproc, dacă considerăm $G \in f(x)g(x) - \displaystyle\int f'(x)g(x)dx$, atunci există $H \in \displaystyle\int f'(x)g(x)dx$ cu $G = fg - H$. Cum $G' = (fg)' - H' = fg'$, deducem că $G \in \displaystyle\int fg'dx$, adică am demonstrat şi incluziunea

$$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \subset \int f(x)g'(x)dx,$$

ceea ce trebuia arătat.

Practic, dacă avem de calculat $\int h(x)dx$ se caută să se scrie $h(x) = f(x)g'(x)$.

Exemple 5.2.3. Pentru calculul integralei

$$I = \int x2^x dx,$$

punem

$$f(x) = x, \quad g'(x) = 2^x$$

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$$

şi avem

$$I = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx =$$

$$= \frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + C.$$

5.2.4. Pentru a calcula

$$I = \int x \cos 3x dx$$

punem

$$f(x) = x, \quad g'(x) = \cos 3x$$

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = \frac{\sin 3x}{3}$$

şi avem

$$I = \frac{1}{3}x \sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x \, dx =$$

$$= \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C.$$

Observaţia 5.2.1 *Dacă funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile de n ori pe intervalul I, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci are loc* **formula generalizată** *de integrare prin părţi*

$$\int f(x)g^{(n)}(x)dx = f(x)g^{(n-1)}(x) - f'(x)g^{(n-2)}(x)+$$

$$+\ldots + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)g(x) + (-1)^n \int f^{(n)}(x)g(x)dx.$$

Exemple. 5.2.5. Pentru a calcula $I = \displaystyle\int (x^2 - 2x)e^x dx$ punem

$$g^{(3)}(x) = e^x$$

$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow{+} g^{(2)}(x) = e^x$$

$$f'(x) = 2x - 2 \xrightarrow{-} g'(x) = e^x$$

$$f^{(2)}(x) = 2 \xrightarrow{+} g(x) = e^x$$

$$f^{(3)}(x) = 0 \xrightarrow{-\int} g(x) = e^x$$

şi avem

$$I = (x^2 - 2x)e^x - (2x - 2)e^x + 2e^x + C =$$

$$= (x^2 - 4x + 4)e^x + C.$$

5.2.6. Pentru a calcula

$$I = \int e^{ax} \sin bx dx, \quad a, b \in \mathbb{R}^*$$

punem

$$g''(x) = \sin bx$$

$$f(x) = e^{ax} \xrightarrow{+} g' = -\frac{\sin bx}{b^2}$$

$$f'(x) = ae^{ax} \xrightarrow{-} g(x) = -\frac{\sin bx}{b^2}$$

$$f''(x) = a^2 e^{ax} \xrightarrow{+\int} g(x) = -\frac{\sin bx}{b^2}$$

şi avem

$$I = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}I$$

de unde

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos x) + C.$$

Observaţia 5.2.2 *Următoarele tipuri de integrale se calculează comod prin metoda integrării prin părţi:*

1) $\int P_n(x)a^{bx+c}dx$, $a > 0$, $a \neq 0$, P_n*–polinom de gradul n* $n \in \mathbb{N}^*$ *(se pune* $f(x) = P_n(x)$*);*

2) $\int P_n(x) \cdot P_m(x)dx$ *(se pune* $f(x) = P_k(x)$, $k = \min(n,m)$*);*

3) $\int P_n(x)\sin(ax+b)dx$ *(se pune* $f(x) = P_n(x)$*);*

4) $\int P_n(x)\cos(ax+b)dx$ *(se pune* $f(x) = P_n(x)$*);*

5) $\int u(x)\ln v(x)dx$ *(se pune* $f(x) = \ln v(x)$*);*

6) $\int u(x)\left\{\begin{array}{l}\arcsin v(x)\\ \arccos v(x)\\ arctg\ v(x)\\ arcctg\ v(x)\end{array}\right\}dx$ *(se pune* $f(x) = \arcsin v(x)$, *respectiv* $\arccos v(x)$, $arctg\ v(x)$, $arcctg\ v(x)$*);*

7) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx$ *(se pune* $f(x) = \sqrt{x^2 \pm a^2}$*);*

8) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ *(se pune* $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$*).*

Metoda schimbării de variabilă (substituţiei).

În matematică schimbarea de variabilă joacă un rol important. Formal, o schimbare de variabilă poate fi considerată ca o transformare a unei funcţii, pornind de la ideea unei notaţii (schimbări) convenabile de variabilă, în scopul simplificării rezolvării unei probleme.

O schimbare de variabilă poate fi privită astfel: dacă avem o problemă ce conţine variabila x, substituim x cu o altă expresie, exprimată printr-o variabilă nouă (de exemplu $x = h(t)$), cu scopul ca în noua formulare problema să aibă o soluţie mai simplă.

În aflarea primitivelor unor funcţii schimbarea de varaibilă este o metodă eficientă.

Teorema 5.2.2 *Fie* I, J *două intervale din* $\mathbb{R}$ *şi* $g : I \to J$ *o funcţie derivabilă, iar* $f : J \to \mathbb{R}$ *o funcţie primitivabilă. Atunci, funcţia* $(f \circ g) \cdot g' : I \to \mathbb{R}$ *este primitivabilă şi dacă* F *este o primitivă a lui* f*, atunci avem*

$$\int (f \circ g)(x) g'(x) dx = (F \circ g)(x) + C,$$

numită **formula schimbării de variabilă**.

Demonstraţie. Să observăm că $F \circ g$ este derivabilă pe I deoarece este compunere de două funcţii derivabile şi avem

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'.$$

De aici rezultă că $(f \circ g) \cdot g'$ este primitivabilă şi

$$\int (f \circ g)(x) \cdot g'(x) dx = (F \circ g)(x) + C.$$

Practic, formula schimbării de variabilă se aplică atunci când dorim să calculăm o integrală de forma:

$$\int h(x) dx,$$

$x \in I$.

Ea are două variante de lucru, una directă şi una de tip invers.

În varianta directă (numită de mulţi matematicieni **prima metodă de schimbare de variabilă**) se observă că $h(x) = f(g(x))g'(x)$. În acest moment facem schimbarea de variabilă (substituţia) $g(x) = t$. Apoi înlocuim prin diferenţiere $g'(x)dx$ prin dt (adică $dt = g'(x)dx$) şi obţinem

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\underbrace{g'(x)dx}_{dt} = \int f(t)dt$$

Dacă $\int f(t)dt = F(t) + C$, atunci

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

În varianta de tip invers (numită de către unii matematicieni **a doua metodă de schimbare de variabilă**) se face schimbarea de variabilă $x = g(t)$, $g : I \to J$, g derivabilă şi bijectivă. De aici, prin diferenţiere avem $dx = g'(t)dt$ şi integrala ia forma

$$\int h(x)dx = \int h(g(t))g'(t)dt.$$

Dacă

$$\int h(g(t))g'(t)dt = H(t) + C,$$

atunci

$$\int h(x)dx = H(g^{-1}(x)) + C.$$

Exemple 5.2.7. Fie de calculat integrala

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Facem schimbarea de varaibilă $g(x) = x^2 + x + 1 = t$, $t \in [\frac{3}{4}, \infty)$ cu $(2x+1)dx = dt$.

Avem
$$\int \frac{dt}{t} = \ln t + C$$
şi prin urmare:
$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1) + C.$$

5.2.8. Să calculăm $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, $a > 0$.

Considerăm funcţia $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a^2-x^2}$. Se observă că punând $x = h(t)\ a \sin t$, cu $h : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-a, a]$, h bijectivă şi derivabilă pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, avem
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a \int \sqrt{1-\sin^2 t}\ a\ \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

Cum
$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C,$$
$$t = \arcsin\frac{x}{a} \text{ şi } \sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$$
obţinem
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{4}\cdot 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + C =$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

5.3 Aflarea primitivelor funcţiilor raţionale

În acest paragraf prezentăm pe scurt aflarea primitivelor funcţiilor raţionale.

O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, se numeşte **raţională** dacă $f(x) = P(x)/Q(x)$, unde P şi Q sunt funcţii polinomiale cu coeficienţi reali şi $Q(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I$.

Definiţia 5.3.1 *O funcţie raţională f se numeşte* **simplă** *dacă are una din formele:*

i) f este funcţie polinomială;

ii) $f(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in I$, $I \subset (-\infty, a)$ sau $I \subset (a, \infty)$;

iii) $f(x) = \dfrac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

Din algebră se cunoaşte următoarea teoremă fundamentală de descompunere în fracţii simple

Teorema 5.3.1 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = P(x)/Q(x)$, ($Q(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I$), P şi Q polinoame prime între ele, o funcţie raţională.*

Presupunem că descompunerea lui Q în factori primi are forma

$$Q(x) = (x - d_1)^{\alpha_1} \dots (x - d_m)^{\alpha_m} (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \dots$$

$$\dots (a_n x^2 + b_n x + c_n)^{\beta_n},$$

unde $b_j^2 - 4a_j c_j < 0, \ j = \overline{1, n}$

Atunci f se descompune, în mod unic, sub forma:

$$f(x) =$$

$$S(x) + \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{A_{1,k}}{x - d_k} + \frac{A_{2,k}}{(x - d_k)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha_k,k}}{(x - d_k)^{\alpha_k}} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{B_{1,i}x + C_{1,i}}{a_1x^2 + b_ix + c_i} + \frac{B_{2,i}x + C_{2,i}}{(a_2x^2 + b_ix + c_i)}^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. \frac{B_{\beta_i,i}x + C_{\beta_i,i}}{(a_ix^2 + b_ix + c_i)^{\beta_i}} \right] \tag{5.1}$$

unde S este o funcţie polinomială cu coeficienţi reali, iar $A_{j,k}$, $B_{t,i}$, $C_{t,i}$ sunt constante reale.

Dacă grad $P \geq$ grad Q, atunci se face împăţirea lui P la Q şi avem $P = S \cdot Q + R$, unde grad $R <$ grad Q şi deci

$$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Acum pentru $R(x)/Q(x)$ avem descompunerea în fracţii simple de tipurile ii) şi iii) şi corespunde celor două sume din (5.1). Pentru aflarea coeficienţilor se procedează prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi sau prin metoda valorilor particulare.

Aşadar, calcularea primitivelor funcţiilor raţionale se reduce la integrarea funcţiei putere şi găsirea primitivelor fracţiilor simple.

Pentru fracţii simple de la ii) avem

$$\int \frac{A}{x - a} dx = A \ln |x - a| + C$$

şi

$$\int \frac{A}{(x - a)^n} dx = \frac{A}{n - 1} \cdot \frac{1}{(x - a)^{n-1}} + C, \quad n \geq 2.$$

Acum să calculăm primitivele fracţiilor simple de la iii).
Pentru $n = 1$ avem

$$\int \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{\frac{B}{2a}(2ax + b) + C - \frac{Bb}{2a}}{ax^2 + bx + c}dx =$$

$$= \frac{B}{2a}\ln|ax^2 + bx + c| + \left(C - \frac{Bb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Integrala rămasă se calculează scriind $ax^2 + bx + c$ sub forma canonică:

$$ax^2+bx+c = a\left[a^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Exemplul 5.3.1. Să calculăm $\displaystyle\int \frac{5x + 3}{2x^2 - 3x + 1}dx$, $x > 1$.

Avem

$$\int \frac{5x + 3}{2x^2 - 3x + 1}dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x - 3) + 3 + \frac{15}{4}}{2x^2 - 3x + 1}dx =$$

$$= \frac{5}{4}\ln|2x^2 - 3x + 1| + \frac{27}{4}\int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 1}$$

şi

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{9}{16}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x - 1}{x - \frac{1}{2}}\right| + C.$$

Aşadar

$$\int \frac{5x-3}{2x^2-3x+1}dx = \frac{5}{4}\ln|2x^2-3x+1| + $$
$$+\frac{27}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right| + C.$$

Pentru $n \geq 2$ procedăm astfel:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \\
&= \int \frac{\frac{B}{2a}(2ax+b)+C-\frac{Bb}{2a}}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \\
&= -\frac{B}{2a}\cdot\frac{1}{n-1}\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \\
&+\left(C-\frac{Bb}{2a}\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

În integrala rămasă scriem ax^2+bx+c sub forma canonică şi facem substituţia $x+\frac{b}{2a}=t$, rezultând integrala de tipul

$$\int \frac{dt}{(t^2+p^2)^n},$$

unde $p=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ pentru cazul cu "+" şi, respectiv, $p=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ pentru cazul cu "−", $\Delta=b^2-4ac$.

Integrând prin părţi, pentru integrale se găsesc formulele de recurenţă

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dt}{(t^2 \pm p^2)^n}dx = \pm\frac{1}{2(n-1)p^2}\cdot\frac{t}{(t^2\pm p^2)^{n-1}} + \\
&+\frac{2n-3}{2(n-1)p^2}\int\frac{dt}{(t^2\pm p^2)^{n-1}}, n=2,3,\ldots
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Revenind în (5.3) la variabila x, obţinem formula de recurenţă

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \\ = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \alpha \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}, \tag{5.4}$$

$n = 2, 3, \ldots$, unde A, B, α sunt numere reale.

Aplicând repetat formulele (5.4), găsim egalitatea

$$\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \\ = \frac{P_{2n-3}(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \lambda \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \tag{5.5}$$

unde $P_{2n-3}(x)$ este un polinom de gradul $2n-3$ (mai mic cu o unitate decât al numitorului) cu coeficienţi nedeterminaţi, iar λ o constantă.

Practic, pentru a calcula

$$\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}dx, \quad n \geq 2,$$

se poate proceda ca mai sus sau scriind direct (5.5) şi determinând coeficienţii polinomului $P_{2n-3}(x)$ şi a constantei λ prin identificare. În acest scop, se derivează în (5.5) şi găsim

$$\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n} = \\ \frac{P'_{2n-3}(x)(ax^2+bx+c) - (n-1)(2ax+b)P_{2n-3}(x)}{(ax^2+bx+c)^n} + \\ + \frac{\lambda}{ax^2+bx+c}.$$

Eliminând numitorul, ajungem la o egalitate de două polinoame, de unde, prin identificare, rezultă un sistem de ecuaţii liniare, având ca necunoscute coeficienţii polinomului $P_{2n-3}(x)$ şi λ.

Exemplu 5.3.2. Calculaţi

$$\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)^3}dx.$$

Scriem egalitatea

$$\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)^3}dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2-3x+2)^2}+$$

$$+\lambda \int \frac{dx}{x^2-3x+2},$$

de unde, prin derivare şi eliminarea numitorului, găsim:

$$3x+7 = (3Ax^2+28x+C)(x^2-3x+2)-2(2x-3)(Ax^3+Bx^2+$$

$$+Cx+D)+\lambda(x^2-3x+2)^2.$$

Prin identificare obţinem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} -A+\lambda = 0 \\ 3A+2B+6 = 0 \\ 6A-3C+13 = 0 \\ 4B+3C-4D-12 = 3 \\ 2C+4D+4 = 7 \end{cases}$$

care are soluţia

$$A = \lambda = 69, \quad B = -\frac{621}{2}, \quad C = 437, \quad D = -\frac{381}{2}.$$

Cum

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C,$$

în final găsim:

$$\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)^3}dx = \frac{138x^3-621x^2+874x-381}{2(x^2-3x+2)^2}+\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.$$

5.3.3. Să calculăm

$$\int \frac{x^6-x^2-2}{1-x^4}dx.$$

Avem

$$\frac{x^6-x^2-x}{1-x^4} = -x^2+\frac{x}{x^4-1},$$

cu

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Efectuând calculele, găsim

$$A = B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad D = 0$$

Acum obţinem:

$$\int \frac{x^6-x^2-x}{1-x^4}dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$$

5.4 Primitive de funcţii iraţionale

În acest paragraf prezentăm metode de găsire a primitivelor unor clase de funcţii iraţionale.

5.4.1 Integrale de tipul $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $x \in I$, I un interval pe care $ax^2+bx+c>0$

Scriem ax^2+bx+c sub formă canonică şi obţinem o integrală de una din formele

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}} \quad \text{sau} \quad \int \frac{du}{k^2-u^2}, \quad k>0.$$

Exemplul 5.4.1. Să calculăm

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{-7x^2+6x+1}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{7}, 1\right).$$

Avem succesiv

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{-7[x^2-\frac{6}{7}x-\frac{1}{7}]}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[\left(x-\frac{3}{7}\right)^2-\frac{16}{49}\right]}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2-\left(x-\frac{3}{7}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arcsin \frac{x-\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \arcsin \frac{7x-3}{4} + C.$$

5.4.2 Integrale de tipul $I_2 = \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $x \in I$, I un interval pe care $ax^2+bx+c>0$

Mai întâi facem să apară la numărător derivata lui ax^2+bx+c. Avem

$$I_2 = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{bm}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx =$$

$$= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(n-\frac{bm}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

care se ştie finaliza.

5.4.3 Integrale de tipul $I_3 = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, unde $P_n(x)$ este un polinom de grad n

Formula obţinută la 5.4.2. ne sugerează următoarea relaţie de calcul

$$\int \frac{Pn(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+$$

$$+\lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

unde $Q_{n-1}(x)$ este un polinom de grad $n-1$ iar λ o constantă. Determinarea coeficienţilor polinomului $Q_{n-1}(x)$ şi a constantei λ se face prin metoda identificării. În acest scop, se derivează în egalitate, se elimină numitorul $2\sqrt{ax^2+bx+c}$ şi se egalează coeficienţii polinoamelor din cei doi membrii, rezultând astfel un sistem de $n+1$ ecuaţii liniare, din care se află coeficienţii lui $Q_{n-1}(x)$ şi constanta λ.

Exemplul 5.4.2. Să se calculeze integrala

$$I_3 = \int \frac{x^3+2x+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Scriem egalitatea

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx =$$

$$= (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

de unde prin derivare obţinem:

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}+$$

$$+(Ax^2+Bx+C)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Eliminând numitorul şi identificând coeficienţii polinoamelor obţinute, găsim sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 4A + 2B = 2 \\ 4A + 3B + C = 3 \\ 2B + C = 4 \end{cases}$$

care are soluţia

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{6}, \quad C = \frac{7}{6}, \quad \lambda = \frac{5}{2}$$

Cum

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$$

$$\ln(x + 1 + \sqrt{x^2+2x+2}) + C,$$

obţinem

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2} +$$

$$+ \frac{5}{2}\ln(x + 1 + \sqrt{x^2+2x+2}) + C.$$

5.4.4 Integrale de tipul $I_4 = \int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}dx$, $x \in I$, I interval pe care $ax^2+bx+c > 0$, iar $P_n(x)$ este un polinom de gradul n

Aceste integrale se reduc la cele de la §5.4.3, prin amplificarea expresiei de sub semnul integralei cu $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

5.4.5 Integrale de forma $I_5 = \int \frac{dx}{(x-d)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$, unde $x \in I$ pe care $ax^2+bx+c > 0$ şi $x - d \neq 0$

Cu schimbarea de variabilă $x - d = 1/t$ aceste integrale se reduc la integrale de tipul 5.4.3.

5.4.6 Integrale de forma $I_6 = \int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$, unde $R = P/Q$ este o funcţie raţională, $P, Q \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}]$, $x \in I \subset (0, \infty)$, pe care $Q(x) \neq 0$

Pentru calcularea lui I_6 notăm cu λ cel mai mic multiplu comun al numitorilor $n_1, n_2, \ldots, n_k$ şi efectuăm substituţia $x = t^\lambda$, care conduce la raţionalizarea expresiei de sub integrală.

Exemplu 5.4.3. Să calculăm

$$I_6 = \int \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}dx, \quad x \in (0,\infty)$$

Notăm $x = t^{12}$ şi avem $dx = 12t^{11}dt$. Atunci:

$$I_6 = 12\int \frac{(2+t^6)t^{11}}{t^4+t^3}dt =$$

$$= 12\int \frac{t^8(t^6+2)}{t+1}dt = 12\int \frac{t^8(t^6-1+3)}{t+1}dt =$$

$$12\int t^8(t^5-t^4+t^3-t^2+t-1)dt + 36\int \frac{t^8-1+1}{t+1}dt =$$

$$= 12\int (t^{13}-t^{12}+t^{11}-t^{10}+t^9-t^8)dt +$$

$$+36\int (t^7-t^6+t^5-t^4+t^3-t^2+t-1)dt + 36\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \frac{6}{7}t^{14} - \frac{12}{13}t^{13} + t^{12} - \frac{12}{1}1t^{11} + \frac{6}{5}t^{10} - \frac{4}{3}t^9 +$$

$$+36\left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t\right) + 36\ln(t+1) + C,$$

unde $t = \sqrt[12]{x}$.

5.4.7 Integrale de forma $I_7 = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$ unde $x \in I$ este un interval pe care $(ax+b)/(cx+d) > 0$, iar R este o funcţie raţională

Pentru calculul acestui tip de integrale efectuăm substituţia

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\lambda},$$

unde λ este cel mai mic multiplu comun al numitorilor $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

5.4.8 Integrale de forma $I_8 = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, $x \in I$ pe care $ax^2+bx+c > 0$, iar R este o funcţie raţională de două variabile

De obicei, aceste integrale se calculează prin substituţiile lui Euler. Se deosebesc două situaţii.

Cazul $a > 0$. În această situaţie se foloseşte substituţia lui Euler

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a} \cdot x = t$$

de unde găsim

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t}.$$

Cu această schimbare de variabilă integrala dată se reduce la una raţională.

Cazul $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Observăm că acest caz conţine şi situaţia $a < 0$. Avem $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x + x_2)$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile reale ale trinomului. Efectuăm schimbarea de variabilă

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - x_1)t,$$

de unde obţinem

$$x = \frac{ax_2 - x_1t^2}{a - t^2}.$$

Cu această substituţie, calculul integralei I_8 revine la calculul unei integrale raţionale.

5.5 Definiţia integralei definite (Riemann)

În acest paragraf vom introduce integrala definită în sensul dat de Riemann.

Fie a, b două numere reale, $a < b$.

Definiţia 5.5.1 *Numim* **diviziune a intervalului** $[a, b]$ *un sistem finit de puncte* $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, *unde* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. *Punctele* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *se numesc* **puncte de diviziune** *sau* **nodurile diviziunii** Δ *, iar intervalele* $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ *se numesc* **subintervale de diviziune** *sau* **intervale parţiale**.

Definiţia 5.5.2 *Fie* $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *o diviziune a intervalului* $[a, b]$. *Numărul* $\|\Delta\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(x_i - x_{i-1})$ *se numeşte* **norma diviziunii.**

Aşadar, norma diviziunii este cea mai mare dintre lungimile subintervalelor de diviziune.

Exemple. 5.5.1. Pentru diviziunea

$$\Delta = \left(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, 3\right)$$

a intervalului $[1, 3]$ avem

$$\|\Delta\| = \max\left(\frac{3}{2} - 1, 2 - \frac{3}{2}, \frac{5}{2} - 2, \frac{8}{3} - \frac{5}{2}, 3 - \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

5.5.2. Pentru orice număr natural $n \geq 1$ considerăm diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, unde

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \ldots, x_{n-1} =$$

$$= a + (n-1)\frac{b-a}{n}, x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b,$$

numite şi **diviziunea n–echidistantă.** Norma ei este
$\|\Delta\| = (b-a)/n$.

Definiţia 5.5.3 *Fie $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ un şir de diviziuni asociat intervalului $[a, b]$. Vom spune că şirul $(\Delta_n)_{n\geq 1}$* **tinde (sau converge) la 0 în normă** *dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0.$$

Exemplul 5.5.3. Dacă $\Delta_n = (x_0, x_1, \ldots x_n)$ este diviziunea n–echidistantă, atunci şirul de diviziuni (Δ_n) converge în normă la 0 deoarece

$$\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0.$$

Definiţia 5.5.4 *Fie date $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ şi punctele $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (numite puncte* **intermediare** *ale diviziunii). Numărul*

$$\sigma(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se numeşte **suma Riemann** *ataşată funcţiei f, diviziunii Δ şi punctele intermediare ξ_i.*

Observaţia 5.5.1 *Uneori se folsoeşte denumirea de* **sumă riemanniană** *în loc de sumă Riemann. Mai este folosită şi denumirea de* **sumă integrală**.

Observaţia 5.5.2 *Litera grecească* ξ *se citeşte* ksi *şi corespunde literei* x *din alfabetul latin.*

Observaţia 5.5.3 *Putem da şi o interpretare geometrică sumei* $\sigma(f, \Delta, \xi)$. *Pentru* $f : [a, b] \to (0, +\infty)$ *considerăm mulţimea punctelor din plan delimitată de graficul funcţiei, axa* $0x$ *şi dreptele* $x = a$, $x = b$. *Această mulţime se notează prin*

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

şi se numeşte **subgraficul lui** f.

Termenul $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ al sumei $\sigma(f, \Delta, \xi)$ reprezintă aria dreptunghiului de bază $x_i - x_{i-1}$ şi înălţimea $f(\xi_i)$ şi aproximează aria trapezului curbiliniu (fig.5.5.1.) mărginit de graficul funcţiei, axa $0x$ şi dreptele $x = x_{i-1}$, $x = x_i$.

Fig.5.5.1.

Numărul $\sigma(f, \Delta, \xi)$ aproximează aria subgraficului lui f. Se observă că dacă lungimea $x_i - x_{i-1}$ este mică, atunci aria dreptunghiului de bază $x_i - x_{i-1}$ aproximează ”mai bine” aria trapezului curbiliniu. Rezultă că dacă lungimile subintervalelor diviziunii Δ sunt mici, atunci $\sigma(f, \Delta, \xi)$ aproximează ”mai bine” aria subgraficului lui f.

Definiţia 5.5.5 *Fie funcţia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Spunem că funcţia* f *este* **integrabilă Riemann pe** $[a, b]$ *dacă pentru orice şir* (Δ_n) *de diviziuni ale lui* $[a, b]$, *convergent la* 0 *în normă şi oricare ar fi punctele intermediare* $\xi_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $i = 1, 2, \ldots, k_n$, *şirul sumelor Riemann* $(\sigma(f, \Delta_n, \xi_{i,n}))$ *este convergent la acelaşi număr real.*

Numărul real I pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta_n, \xi_{i,n}) = I$ se notează prin $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ şi se numeşte **integrala definită a lui** f **pe** $[a, b]$**.** Citirea corectă a simbolurilor $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ este **integrală de la** a **la** b **din** $f(x)dx$**.**

Simbolul $\int$ se numeşte **semnul integralei.** Numerele a şi b se numesc **limite de integrare**: a este **limita inferioară** de integrare, iar b este **limita superioară de integrare**. Intervalul $[a, b]$ este numit **intervalul de integrare.** Funcţia f se numeşte **funcţia de integrat** sau **integrant.** Variabila x se numeşte **variabila de integrare.**

În continuare, pentru simplificarea limbajului, vom folosi denumirile simplificate: **funcţie integrabilă** în loc de ”funcţie integrabilă Riemann” şi **integrală** în loc de ”integrala Riemann”. De asemenea, dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$, vom zice că f este integrabilă.

Observaţia 5.5.4 *Variabila de integrare este o variabilă* **mută (liberă)**, *în sensul că o putem nota cu orice literă.*

Altfel spus, avem egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Observaţia 5.5.5 *Integrala lui f pe $[a,b]$ (când există!) este unic determinată de integrandul f şi intervalul de integrare $[a,b]$ deoarece limita unui şir convergent este unică.*

Exemplul 5.5.4. Funcţia constantă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=k$, pentru orice x din $[a,b]$, unde k este un număr real fixat, este integrabilă.

Pentru a justifica această afirmaţie alegem un şir $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ de diviziuni ale lui $[a,b]$ convergent în normă la 0 şi sistemele de puncte intermediare $\xi_{i,n}\in[x_{i-1,n},x_{i,n}]$, $i=1,2,\ldots,k_n$. Atunci, pentru orice n, avem

$$\sigma(f,\Delta_n,\xi_{i,n}) = \sum_{i=1}^{k_n} k(x_{i,n}-x_{i-1,n}) = k(b-a).$$

Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(f,\Delta_n,\xi_{i,n}) = k(b-a),$$

ceea ce ne demonstreză că

$$f(x)=k \qquad \text{este integrabilă}$$

şi

$$\int_a^b kdx = k(b-a).$$

Teorema 5.5.1 *(***de caracterizare a integrabilităţii cu** ε **şi** δ*). Funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă, există un număr real I (de fapt $I=\int_a^b f(x)dx$) cu* *proprietatea: pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât oricare ar fi diviziunea* Δ *a lui* $[a,b]$ *cu* $\|\Delta\| \leq \delta_\varepsilon$ *şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *corespunzătoare lui* Δ *avem* $|\sigma(f, \Delta, \xi) - I| < \varepsilon$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem că f este integrabilă pe $[a,b]$. Atunci luăm $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ şi considerăm că există un $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că pentru oricea n natural există o diviziune Δ_n a lui $[a,b]$ cu $|\Delta_n| < \frac{1}{n}$ şi există o alegerea a sistemelor de puncte intermediare $\xi_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $i = \overline{i,n}$ corespunzătoare diviziunii Δ_n aşa încât $|\sigma(f, \Delta_n, \xi_{i,n}) - I| \geq \varepsilon_0$ pentru orice $n \geq 1$. Ultima inegalitate contrazice faptul că

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta_n, \xi_{i,n}) = I$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Contradicţia ne arată că pentru $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ are loc proprietatea din anunţ.

Suficienţa. Admitem că există I real cu proprietatea din enunţ. Vom demonstra că f este integrabilă şi avem $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Pentru aceasta considerăm un şir (Δ_n), $n \geq 2$ de diviziuni ale lui $[a,b]$ care converge la 0 în normă şi să alegem în mod arbitrar punctele intermediare $\xi_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $i = \overline{i, k_n}$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta_\varepsilon > 0$ aşa încât $\|\Delta_n\| \leq \delta_\varepsilon$. Aceasta înseamnă că există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\|\Delta_n\| \leq \delta_\varepsilon$ dacă $n \geq n_\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$|\sigma(f, \Delta_n, \xi_{i,n}) - I| < \varepsilon,$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta_n, \xi_{i,n}) = I.$$

Această înseamnă că f este integrabilă şi

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Acum putem demonstra un rezultat important relativ la funcţiile integrabile.

Teorema 5.5.2 *(***de mărginire a funcţiilor integrabile***). Dacă funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, este integrabilă pe $[a,b]$, atunci f este mărginita pe $[a,b]$.*

Demonstraţie. Din f integrabilă pe $[a,b]$, conform cu Teorema 5.4.1., pentru $\varepsilon = 1$ exista $I \in \mathbb{R}$ şi $\delta > 0$ astfel ca $|\sigma(f,\Delta,\xi) - I| < 1$, pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ şi orice alegere a punctelor intermediare $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Pentru a demonstra că f este mărginită pe $[a,b]$ este suficient să arătăm că f este mărginită pe orice interval parţial $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Fie deci $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixat. Notăm

$$\sigma_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

şi avem

$$I - 1 < \sigma(f,\Delta,\xi) < I + 1$$

şi

$$\sigma(f,\Delta,\xi) = \sigma_n + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

De aici, obţinem inegalităţile

$$I - 1 - \sigma_k < f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) < I + 1 - \sigma_k,$$

ceea ce implică

$$\frac{I - 1 - \sigma_k}{x_k - x_{k-1}} < f(\xi_k) < \frac{I + 1 - \sigma_k}{x_k - x_{k-1}},$$

pentru orice $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Deci, conchidem că f este mărginită pe $[x_{k-1}, x_k]$.

În încheierea acestui paragraf preyentăm două clase importante de funcţii integrabile, cele monotone şi cele continue pe $[a, b]$.

Teorema 5.5.3 *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este monotonă pe $[a, b]$, atunci ea este integrabilă.*

Demonstraţie. Dacă f este o funcţie constantă, atunci ea este integrabilă (vezi Exemplul 5.5.4.).

Presupunem că f nu este constantă şi că este crescătoare. Considerăm şirul (Δ_n) de diviziuni, cu $\Delta_n = (x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{k_n,n})$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Dacă $\xi_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$, $i = \overline{1, k_n}$ sunt punctele intermediare, atunci

$$f(x_{i-1,n}) \leq f(\xi_{i,n}) \leq f(x_{i,n}), i = \overline{1, k_n}.$$

De aici rezultă

$$f(x_{i-1,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) \leq f(\xi_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) \leq$$

$$\leq f(x_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}),$$

de unde prin însumare după $i = \overline{1, k_n}$ găsim

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{k_n} f(x_{i-1,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) \leq \sigma(f, \Delta_n, \xi) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{k_n} f(x_{i,n})(x_{i,n-x_{i-1,n}})\end{gathered} \tag{5.6}$$

Făcând diferenţa sumelor extreme obţinem:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^{k_n} f(x_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) - \\ - \sum_{i=1}^{k_n} f(x_{i-1,n})(x_{i,n} - x_{x_{i-1,n}}) = \\ = \sum_{i=1}^{k_n}(f(x_{i,n}) - f(x_{i-1,n}))(x_{i,n} - x_{i-1,n}) \leq \\ \leq \|\Delta_n\| \sum_{i=1}^{k_n}(f(x_{i,n}) - f(x_{i-1,n})) = \\ \|\Delta_n\|(f(b) - f(a)). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\|(f(b) - f(a)) = 0$, conform criteriului cleştelui, din (5.7) deducem că diferenţa sumelor extreme din (5.6) este convergentă la 0. Cum fiecare sumă este un şir crescător şi mărginit (relativ la n), atunci din (5.6) obţinem că cele trei sume au aceeaşi limită şi anume

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 5.5.4 *Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.*

Demonstraţia acestei teoreme cere introducerea noţiunilor de sume Darboux, ceea ce face să renunţăm la ea (vezi [20]).

Definiţia 5.5.6 *Dacă $f : a, b \to \mathbb{R}$, $a \leq b$ este o funcţie integrabilă, atunci prin definiţie:*

1) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ *şi*

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

5.6 Proprietăţile integralei definite

În acest paragraf vom prezenta proprietăţile principale ale integralei definite (Riemann).

Teorema 5.6.1 *Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii integrabile pe $[a, b]$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi avem egalitatea*

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_1^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Demonstraţie. Fie $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ un şir de diviziuni ale lui $[a, b]$, cu $\Delta_n = (x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{k_n,n})$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$.

Dacă $\xi_{i,n} \in [x_{i-1,n}, x_{i,n}]$ $i = \overline{1, k_n}$ sunt punctele intermediare, atunci avem

$$\sigma(\alpha t + \beta g, \Delta_n, \xi_{i,n}) = \sum_{i=0}^{k_n} [\alpha f(\xi_{i,n}) + \beta g(\xi_{i,n})](x_{i,n} - x_{i-1,n}) =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{k_n} f(\xi_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) + \beta \sum_{i=0}^{k_n} g(\xi_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) =$$

$$= \alpha\sigma(f, \Delta_n, \xi_{i,n}) + \beta\sigma(y, \Delta_n, \xi_{i,n})$$

Cum f, g sunt integrabile rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(\alpha f + \beta g, \Delta_n, \xi_{i,n}) = \alpha \lim_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta_n, \xi_{i,n}) +$$

$$+\beta \lim_{n\to\infty} \sigma(g, \Delta_n, \xi_{i,n}) = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$$

Prin urmare, $\alpha f + \beta g$ este integrabilă şi are loc formula din enunţul teoremei.

Teorema 5.6.2 *(***Proprietatea de ereditate a integrabilităţii***). Dacă funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$, atunci, pentru orice interval $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, f este integrabilă şi pe $[\alpha,\beta]$*

Lăsăm demonstraţia în seama cititorului

Teorema 5.6.3 *(***Proprietatea de aditivitate faţă de interval***). Dacă funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi $a < c < b$, atunci f este integrabilă pe $[a,c]$ şi pe $[c,b]$ şi avem egalitatea*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_x^b f(x)dx.$$

Demonstraţie se face cu ajutorul sumelor integrale.

Teorema 5.6.4 *(***Proprietatea de semn***)Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă şi $f(x) \geq 0$ (respectiv ≤ 0), oricare ar fi $x \in [a,b]$, atunci*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (\textit{respectiv } \leq 0).$$

Demonstraţia rezultă imediat din definiţia integralei cu ajutorul sumelor integrale.

Teorema 5.6.5 *(***Proprietatea de monotonie***) Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile pe $[a,b]$ aşa încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$, atunci*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstraţie. Folosim $g(x) - f(x) \geq 0$, $(\forall)x \in [a, b]$ şi proprietatea de semn a integralei (Teorema 5.6.4).

Teorema 5.6.6 *(***Proprietatea modulului***) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci are loc inegalitatea*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Demonstraţie. Deoarece f este continuă rezultă că $|f|$ este continuă, deci integrabilă. Ţinând seama de inegalităţile

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad (\forall)x \in [a, b]$$

şi aplicând Teorema 5.6.5, obţinem

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

de unde

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Observaţia 5.6.1 *Proprietatea modulului rămâne valabilă şi dacă considerăm funcţia f numai integrabilă (v. [13]).*

Teorema 5.6.7 *(***Prima formulă de medie a calculului integral***.) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile pe $[a, b]$, iar g are semn constant pe $[a, b]$, atunci există un număr α, cu $m \leq \alpha \leq M$, m şi M marginile lui f pe $[a, b]$,a stfel încât*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \alpha \int_a^b g(x)dx,$$

numită **prima formulă de medie a calculului integral**.

Demonstraţie. Să presupunem că $g(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a,b]$. Cum $m \leq f(x) \leq M$, $(\forall)x \in [a,b]$,a vem $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, $(\forall)x \in [a,b]$. De aici, aplicând proprietatea de monotonie a integralei, obţinem

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx. \tag{5.8}$$

Dacă

$$\int_a^b g(x)dx = 0,$$

atunci

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

si putem alege $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dacă

$$\int_a^b g(x)dx > 0,$$

atunci din (5.8) avem

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

şi alegem

$$\alpha = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}.$$

Observaţia 5.6.2 *Dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci există $c \in [a,b]$ aşa încât $f(c) = \alpha$ şi deci formula de medie ia forma*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

În particular, pentru $g(x) = 1$, $x \in [a,b]$, obţinem

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Observaţia 5.6.3 Formula lui Bonnet *sau* **a doua formulă de medie a calculului integral**.

Dacă f şi g sunt integrabile pe $[a,b]$, f pozitivă şi monoton descrescătoare, atunci există c, $c \in [a,b]$, astfel ca

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^c g(x)dx \quad \text{(v.[15])}$$

Observaţia 5.6.4 *Se demonstrează că dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii integrabile, atunci şi fg este integrabilă (v.[15])*

Teorema 5.6.8 *(***Teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue***.) Pentru orice funcţie continuă f :*

$[a,b] \to \mathbb{R}$, *funcţia* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, *definită prin*

$$F(x) = \int_a^b f(t)dt, \quad (\forall)x \in [a,b]$$

este o primitivă a lui f *cu* $F(a) = 0$.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in [a,b]$ şi $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$. Atunci

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt. \tag{5.9}$$

Aplicăm prima formulă de medie integralei $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Deci, există $c_x \in [x_0, x]$ sau $c_x \in [x, x_0]$, după cum $x_0 < x$ sau $x_0 > x$, aşa încât

$$\int_{x_0}^x f(t)dt = f(c_x)(x - x_0). \tag{5.10}$$

Din (5.9) şi (5.10) rezltă

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c_x),$$

de unde

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c_x) = f(x_0)$$

(deoarece c_x este cuprins între x si x_0, iar f este continuă).

Cele de mai sus sunt valabile şi dacă $x_0 = a$ sau $x_0 = b$.

În concluzie, F este derivabilă pe $[a,b]$ şi $F' = f$,a dică F este o primitivă a funcţiei f. Conform, cu Definiţia 5.5.6, avem $F(a) = 0$.

Observaţia 5.6.5 *Se demonstrează uşor că dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci orice primitivă F ce se cere se anulează într-un punct $x_0 \in [a, b]$ are forma*

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$$

Teorema 5.6.9 *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă care admite primitive pe $[a, b]$, atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc egalitatea*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \overset{not}{=} F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

numită **formula lui Leibniz–Newton**.

Demonstraţie. Fie $\Delta_n = (x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{k_n,n})$ un şir de diviziuni ale intervalului a, b convergent în normă la zero.

Aplicăm funcţiei F teorema creşterilor finite pe intervalul $[x_{i-1,n}, x_{i,n}]$ şi obţinem punctul $\xi_{i,n} \in (x_{i-1,n} x_{i,n})$ cu proprietatea

$$F(x_{i,n}) - F(x_{i-1,n}) = F'(\xi_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) = f(\xi_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}).$$

Acum putem scrie

$$\sigma(f, \Delta_n, \xi_{i,n}) = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_{i,n})(x_{i,n} - x_{i-1,n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_{i,n}) - F(x_{i-1,n})] = F(b) - F(a), \quad (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

Cum f este integrabilă, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, \Delta_n, \xi_{i,n}) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Observaţia 5.6.6 *Există funcţii integrabile care nu admit primitive, după cum există funcţii mărginite care au primitive, dar care nu sunt integrabile.*

5.7 Calculul integralelor definite

În acest paragraf vom expune câteva din principalele metode de calcul al integralelor definite.

5.7.1 Calculul integralelor cu ajutorul sumelor integrale

Metoda este greoaie şi nu este practică.

5.7.2 Calculul integralelor cu ajutorul formulei lui Leibniz–Newton

Este cea mai folosită metodă de calcul pentru integralele definite. Dacă avem de calculat $\int_a^b f(x)dx$, atunci se găseşte o primitivă F a lui f şi avem

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplul 5.7.1. Să calculăm

$$I = \int_1^2 \frac{x+1}{x^2+1}dx$$

Avem

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \text{arctg}x + C$$

şi

$$I = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \text{arctg}x\right]\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5 + \text{arctg}2 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} + \text{arctg}2 - \frac{\pi}{4}.$$

Practic, se scrie direct:

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx + \int_1^2 \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2 + \text{arctg}x\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2 + \text{arctg}2 - \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} + \text{arctg}2 - \frac{\pi}{4}$$

5.7.3 Metoda integrării prin părţi

Această metodă are la bază următorul rezultat:

Teorema 5.7.1 *(***Teorema de integrare prin părţi***). Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii derivabile, cu derivate continue, atunci*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx,$$

numită **formula de integrare prin părţi**.

Demonstraţie. Din $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, oricare ar fi $x \in [a,b]$, rezultă că $f \cdot g$ este o primitivă a funcţiei $f' \cdot g + g \cdot g'$. De aici, conform formulei lui Leibniz–Newton, avem

$$\int_a^b (f\cdot g)'(x)dx = (f\cdot g)(x)\Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

de unde

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = (f\cdot g)(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Exemplul 5.7.2. Să se calculeze intgrala

$$I = \int_0^1 (x+1)e^x dx$$

Avem

$$I = (x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 2e - 1 - e^x\Big|_0^1 = 2e - 1 - e + 1 = e.$$

Observaţia 5.7.1 *Dacă funcţiile $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt derivabile de n ori pe intervalul $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$, cu $f^{(n)}$ şi $g^{(n)}$ continue, atunci are loc formula generalizată de integrare prin părţi:*

$$\int_a^b f(x)g^{(n)}(x)dx =$$

$$= \left[f(x)g^{(n-1)} - f'(x)g^{(n-2)}(x) + \ldots + (-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)g(x)\right]\Big|_a^b +$$

$$+(-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)g(x)dx.$$

Exemplul 5.7.3. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^\pi (x^2 + x) \sin 2x \; dx.$$

Avem

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 + x & g'''(x) = \sin 2x \\ f'(x) = 2x + 1 & g''(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2} \\ f''(x) = 2 & g'(x) = -\dfrac{\sin 2x}{4} \\ f'''(x) = 0 & g(x) = \dfrac{\cos 2x}{8} \end{array}$$

şi avem:

$$I = \left[-(x^2 + x)\frac{\cos 2x}{2} + (2x+1)\frac{\sin 2x}{4} + 2\frac{\cos 2x}{8} \right]\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{2}(\pi^2 + \pi) + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{\pi(\pi + 1)}{2}.$$

5.7.4 Metoda schimbării de variabilă sau substituţiei

Această metodă are la bază următorul rezultat:

Teorema 5.7.2 *Fie $u : [a, b] \to I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ două funcţii care verifică condiţiile:*

i) f este continuă pe I;

ii) u este derivabilă, cu derivata continuă pe $[a, b]$.
Atunci are loc egalitatea

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt,$$

numită **schimbării de variabilă**.

Demonstraţie. Funcţia f fiind continuă, adimite primitive. Dacă F este o primitivă a lui f pe I, atunci $F'(x) = f(x)$, $(\forall)x \in I$ şi avem

$$\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = F(u(b)) - F(u(a)).$$

Pe de altă parte, observăm că

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x))u'(x), \quad (\forall)x \in [a, b],$$

de unde

$$\int\limits_a^b f(u(x))u'(x)dx = (F \circ u)(x)\Big|_a^b = (F \circ u)(b) - (F \circ u)(a) =$$

$$= F(u(b)) - F(u(a)) = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt.$$

Practic, dacă avem de calculat $\int\limits_a^b h(x)dx$ se caută să se scrie $h(x) = f(u(x))u'(x)$ şi se pune $u(x) = t$. Apoi se calculează $t_a = u(a)$, $t_b = u(b)$ şi $dt = u'(x)dx$.

Exemplul 5.7.4. Să se calculeze

$$I = \int\limits_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx.$$

Soluţie. Observăm că $(x^2 + 1)' = 2x$ şi $x^3 = \frac{1}{2}x^2 2x$. Punem $x^2 + 1 = t$, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, $2x\ dx = dt$ şi avem:

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (t-1)\sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{15}.$$

Observaţia 5.7.2 *În varianta de tip invers (numită de către unii "***a doua metodă de schimbare de variabilă***"), pentru a calcula* $\int\limits_a^b h(x)dx$ *se face schimbare de variabilă* $x = g(t)$, $g : I \to J$, *g derivabilă şi bijectivă. Dacă* $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$, *avem* $dx = g'(t)dt$ *şi*

$$\int\limits_a^b h(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta h(g(t))g'(t)dt.$$

Exemplul 5.7.5. Să se calculeze

$$I = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad a > 0.$$

Punem $x = a\sin t = g(t)$, $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [a, b]$, $g(0) = 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$, este bijectivă şi derivabilă.

Cum $dx = a\cos t\ dt$, avem

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ dt = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

5.8 Aplicaţie economică. Flux de venituri continue

În paragraful 2.5 am arătat că valoarea de capital a unui flux de venituri care variază de la an la an cu valorile $a_0, a_1, \ldots, a_m$, adăugându-se în fiecare an dobânda $r\%$, este dată de formula

$$S = \sum_{i=0}^{m} \frac{a_i}{(1+r)^i}.$$

Noţiunea de integrală definită ne permite să generalizăm rezultatele în cazul în care veniturile variază continuu.

Să presupunem că veniturile sunt obţinute continuu în timp, rata fiind de $f(t)$ unităţi monetare pe an, în orice moment t de ani, socotit din momentul iniţial. Atunci într-un interval de timp $[t, t+\Delta t]$ măsurat în ani, se obţine un venit aproximativ egal cu $f(t)\Delta t$. Considerăm că şi dobânda cumulată variază continuu cu o rată $r\%$, iar r este funcţie de timpul t. Aceasta înseamnă că valoarea veniturilor în intervalul de timp $[t, t+\Delta t]$ este aproximativ egală cu $f(t)e^{-rt}\Delta t$.

Dacă calculăm fluxul veniturilor pe o perioadă de x ani, atunci valoarea aproximativă a fluxului este

$$\sum f(t)e^{rt}\Delta t, \tag{5.11}$$

unde însumarea se face la toate intervalele Δt ani, de la $t = 0$ la $t = x$. Dacă numărul intervalelor de timp creşte, fiecare din ele devenind mai scurt, atunci aproximaţia devine mai bună. Dar, atunci (**5.11**) este o sumă integrală şi obţinem pentru flux formula

$$S = \int_0^x f(t)e^{-rt}dt$$

Astfel că am obţinut valoarea de capital a unui flux de venituri continue.

Să considerăm cazul particular în care venitul este obţinut într-un ritm constant k anual şi rata dobânzii este de $r\%$ anual şi este constantă în timp. Atunci

$$S = a \int_0^x e^{-rt} dt = -\frac{a}{r} e^{-rt} \Big|_0^x = \frac{a}{r}(1 - e^{-rx}).$$

5.9 Ecuaţii diferenţiale

În aplicaţii economice privind probleme de stabilitate, de creştere etc., apar modele matematice care conţin o funcţie (sau mai multe) împreună cu derivata ei (derivatele lor). Astfel de ecuaţii (sisteme de ecuaţii) se numesc **ecuaţii diferenţiale** (**sisteme de ecuaţii diferenţiale**).

Acest paragraf este consacrat prezentării unor tipuri simple de ecuaţii diferenţiale.

Definiţia 5.9.1 *Se numeşte* **ecuaţie diferenţială** *în funcţia necunoscută $y = y(x)$, $x \in I$, I interval, o relaţie de forma*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{5.12}$$

unde F este o funcţie reală de $n + 2$ variabile.

Se numeşte **ordinul ecuaţiei diferenţiale**, cel mai mare dintre ordinele derivatei care figurează în ecuaţie.

Dacă, în particular, ecuaţia este explicitată în raport cu $y^{(n)}$, n fiind ordinul ecuaţiei diferenţiale, adică

$$y^{(n)} = f(x, y, y^1, \ldots, y^{(n-1)}),$$

atunci se zice că ecuaţia diferenţială este dată sub **formă normală**.

Pentru $n = 1$ se obţine o **ecuaţie diferenţială de ordinul întâi.**

Dacă ecuaţia (5.12) are forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y^1 + a_n(x)y = f(x),$$

unde a_k, $k = \overline{0,n}$ şi f sunt funcţii date şi $a_0 \neq 0$, atunci spunem că avem o **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n.**

Dacă a_k, $k = \overline{0,n}$, sunt constante reale, atunci spunem că avem o **ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi.**

Definiţia 5.9.2 *Se numeşte* **soluţie a ecuaţiei diferenţiale (5.12)** *pe intervalul I o funcţie $y = h(x)$ definită pe acest interval împreună cu derivatele sale până la ordinul n şi pentru care înlocuind $y = h(x)$, în ecuaţia diferenţială, aceasta devine o egalitate adevărată pentru orice x din I.*

A rezolva o ecuaţie diferenţială înseamnă a determina toate funcţiile care sunt soluţiile ei. Operaţia de căutare a soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale se numeşte **integrarea ecuaţiei.**
Exemplul 5.9.1. Ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$$y' = x^2 + x, \quad x \in \mathbb{R} \tag{5.13}$$

are familia de soluţii

$$y = \int (x^2 + x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C, \tag{5.14}$$

uned C este o constantă reală arbitrară.

5.9.2. Pentru a găsi soluţiile ecuaţiei diferenţiale de ordinul trei

$$y''' = e^x + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.15}$$

scriem

$$(y'')' = e^x + x + 1,$$

de unde prin integrare obţinem

$$y'' = e^x + \frac{x^2}{2} + x + C_1, \quad x \in \mathbb{R},$$

C_1 – constantă reală arbitrară. Acum scriem $(y')' = e^x + \frac{x^2}{2} + x + C_1$ iar de aici prin integrare găsim

$$y' = e^x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2,$$

unde $x \in \mathbb{R}$, iar C_2 este o nouă constantă reală arbitrară.

Acum, printr-o nouă integrare, obţinem pentru ecuaţia (5.15) familia de soluţii

$$y = e^x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \tag{5.16}$$

unde $x \in \mathbb{R}$, iar C_3 este o constantă reală arbitrară.

Definiţia 5.9.3 *Se numeşte* **soluţie generală** *sau* **integrala generală** *a ecuaţiei diferenţiale (5.12) de ordinul* n*, soluţia ei de forma*

$$y = h(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \tag{5.17}$$

ce depinde de ”n” constante independente $C_1, C_2, \ldots, C_n$*.*

Numim **soluţie particulară** *a ecuaţiei diferenţiale (5.12) orice soluţie a ei obţinută din soluţia generală prin particularizarea constantelor arbitrare.*

De obicei, soluţiile particulare se gasesc impunând una sau mai multe condiţii suplimentare, **numite condiţii iniţiale** sau **condiţii Cauchy**.

Exemplul 5.9.3. Pentru ecuaţia (5.13) soluţia generală este dată de (5.14), iar $y = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2}$ este o soluţie particulară obţinută impunând condiţia iniţială $y(0) = 0$.

Pentru ecuaţia dferenţială (5.15) soluţia generală este dată de (5.16), iar

$$y = e^x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x$$

este o soluţia particulară ce satisface condiţiile iniţiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ şi $y'' = 2$.

În continuare vom prezenta câteva tipuri mai importante de ecuaţii diferenţiale şi modalitatea de integrare a lor.

5.9.1 Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi este

$$F(x, y, y') = 0, \tag{5.18}$$

unde $y = y(x)$ este o funcţie derivabilă pe intervalul I.

Ne vom ocupa cu două tipuri importante de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi: ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile şi ecuaţii diferenţiale liniare.

Definiţia 5.9.4 *O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi se numeşte cu variabile separabile dacă ea poate fi pusă sub forma $y' = f(x)g(y)$, unde f şi g sunt funcţii continue pe intervalul I.*

Dacă scriem $y' = dy/dx$, atunci ecuaţia diferenţială cu variabile separabile se poate scrie sub forma echivalentă

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx. \tag{5.19}$$

Prin împărţirea ambilor membrii ai ecuaţiei printr-o expresie conţinând variabila x şi funcţia necunoscută y se poate întâmpla să se piardă anumite soluţii. Acestea sunt numite **soluţii singulare** şi ele nu se pot obţine din soluţia generală prin particularizare.

Pentru a integra ecuaţia (5.19) se află $F(x)$ şi $G(y)$ două primitive ale funcţiilor $f(x)$ şi $1/g(y)$, iar integrala ei va fi dată de relaţia

$$G(y) = F(x) + C,$$

C fiind o constantă reală arbitrară.

Exemplul 5.9.4. Să se rezolve ecuaţia

$$x^2 y\ y' + 1 = y.$$

Ecuaţia se mai poate scrie

$$x^2 y \frac{dy}{dx} = y - 1$$

de unde, separând variabilele, obţinem

$$\frac{y\ dy}{y-1} = \frac{1}{x^2}dx,$$

în condiţiile $y \neq 1$ şi $x \neq 0$.

Cum

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$$

şi

$$\int \frac{y}{y-1}dy = \int \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) dy = y + \ln|y-1| + C,$$

rezultă că soluţi generală a ecuaţiei date este

$$y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C,$$

C constantă reală arbitrară.

Se observă că $y = 1$ verifică ecuaţia dată, deci este o soluţie singulară, în timp ce $x = 0$ nu verifică ecuaţia dată.

Definiţia 5.9.5 *O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi are forma*

$$y' + a(x)y = f(x), \tag{5.20}$$

unde a şi f sunt funcţii continue pe intervalul I.

Dacă $f \equiv 0$, atunci ecuaţia diferenţială liniară se numeşte **omogenă**, iar dacă $f \neq 0$, atunci ecuaţia se numeşte **neomogenă**.

Pentru rezolvare ecuaţiei diferenţiale liniare (5.20) se caută o soluţie sub forma unui produs de funcţii

$$y = u(x)v(x), \tag{5.21}$$

dintre care u se alege convenabil, iar v se determină impunând condiţia ca funcţia $y = uv$ să verifice ecuaţia diferenţială.

Înlocuim pe $y = uv$ în (5.20) şi avem

$$u'v + uv' + a(x)uv = f(x)$$

sau

$$[u' + a(x)u]v + uv' = f(x) \tag{5.22}$$

Alegem pe u aşa încât

$$u' + a(x)u = 0. \tag{5.23}$$

Această ecuaţie este cu variabile separabile şi putem afla o soluţie a ei. Cu u astfel determinat revenim în (5.22) şi obţinem ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$$uv' = f(x),$$

de unde aflăm pe v.

Cu u şi v găsite revenim în (5.21) şi aflăm soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare (5.20).

Exemplul 5.9.5. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$xy' + y = x^3, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Punem $y = uv$. Obţinem succesiv

$$x(u'v + uv') + uv = x^3$$

$$(xu' + u)v + xuv' = x^3,$$

de unde

$$xu' + u = 0 \quad \text{şi} \quad uv' = x^2.$$

Din $xu' + u = 0$ avem

$$x\frac{du}{dx} = -u$$

sau

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x},$$

care, prin integrare, ne dă

$$\ln u = -\ln x,$$

de unde

$$u = \frac{1}{x}.$$

Cu u astfel determinat, din $uv' = x^2$ găsim

$$v' = x^3.$$

De aici obţinem

$$v = \frac{x^4}{4} + C.$$

În final, soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = uv = \frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4}$$

5.9.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi cu coeficienţi constanţi

Aşa cum am văzut la începutul acestui paragraf, ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul doi cu coeficienţi constanţi au forma

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.24}$$

ude a_0, a_1, a_2 sunt numere reale, $a_0 \neq 0$, iar f este o funcţie continuă dată.

Integrarea ecuaţiei (5.24) se face în două etape. Prima etapă constă în a găsi soluţia generală y_0 a ecuaţiei omogene

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{5.25}$$

iar în cea de a doua etapă se află o soluţie particulară y_p pentru ecuaţia neomogenă (5.24). Soluţia generală a ecuaţiei (5.24) este $y = y_o + y_p$.

Pentru rezolvarea ecuaţiei omogene (5.25) se caută soluţii de forma $y = e^{rx}$, unde r este un număr ce urmează a se determina. Avem $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$ şi (5.25) ia forma

$$(a_0r^2 + a_1r + a_2)e^{rx} = 0$$

Cum $e^{rx} \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă pentru determinarea lui r ecuaţia de gradul doi

$$a_0r^2 + a_1r + a_2 = 0, \tag{5.26}$$

numită **ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei diferenţiale (5.25)**.

Avem următoarele trei situaţii:

1) ecuaţia (5.26) are două rădăcini reale r_1, r_2 distincte, atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene (5.25) este

$$y_o = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

2) ecuaţia caracteristică (5.26) are o rădăcină reală dublă r; atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (5.25) este

$$y_o = (C_1x + C_2)e^{rx}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

3) ecuaţia caracteristică (5.26) are două rădăcini complex conjugate $\alpha + \beta i$ şi $\alpha - \beta_i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, atunci soluţia generală a ecuaţiei (5.25) este

$$y_o = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pentru aflarea unei soluţii particulare y_p a ecuaţiei (5.24) se foloseşte metoda identificării, căutând pe y_p de forma membrului doi.

Astfel, dacă $a_2 \neq 0$ şi $f(x) = P_n(x)$, unde P_n este polinom de gradul n, atunci y_p se caută sub fora $y_p = Q_n(x)$, unde Q_n este un polinom de grad n. Coeficienţii săi se află aşa încât $y_p = Q_n(x)$ să fie soluţie pentru ecuaţia (5.24).

Dacă $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, diferit de rădăcinile ecuaţiei caracteristice, atunci căutăm

$$y_p = Q_n(x)e^{\lambda x}.$$

Dacă $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ este o rădăcină simplă pentru ecuaţia caracteristică, atunci y_p se caută de forma $xQ_n(x)e^{\lambda x}$.

Dacă $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ este o rădacină dublă pentru ecuaţia caracteristică, atunci $y_p = x^2 Q_n(x)e^{\lambda x}$.

Dacă $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x$ şi $i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, P_m şi P_n polinoame date de grade m, respectiv n, atunci

$$y_p = Q_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x,$$

unde Q_s şi T_s sunt polinoame de grad s, $s = \max(m, n)$.

Exemplul 5.9.6. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei diferenţiale este

$$r^2 + 3r - 4 = 0$$

cu rădăcinile $r_1 = 1$ şi $r_2 = -4$.

Soluţia ei generală este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

Exemplul 5.9.7. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$y'' - 2y' = 2x^3 - 4x^2 - 6x + 2.$$

Mai întâi aflăm soluţia generală a ecuaţiei omogene

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică asociată ei este

$$r^2 - 2r + 2 = 0,$$

care are rădăcinile $r_1 = 1 + i$ şi $r_2 = 1 - i$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene este

$$y_o = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Cum coeficientul lui y este $2 \neq 0$, căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene de forma

$$y_p = AX^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Avem

$$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$
$$y_p'' = 6Ax + 2B.$$

Înlocuind în ecuaţia dată, obţinem

$$2Ax^3 + (2B - 6A)x^2 + (2C - 4B + 6A)x + 2D - 4C + 2B =$$
$$= 2x^3 - 4x^2 + 6x + 2.$$

Identificând coeficienţii obţinem sistemul

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ 2B - 6A = -4 \\ 2C - 4B + 6A = 6 \\ 2D - 4C + 2B = 2 \end{cases}$$

care admite soluţia: $A = 1$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 2$, deci

$$y_p = x^3 + x^2 + 2x + 2.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = y_o + y_p = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^3 + x^2 + 2x + 2.$$

5.10 Probleme

1. Aflaţi primitivele funcţiilor:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 7,\ x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^3 + \frac{3}{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 3\sqrt[5]{x},\ x > 0$

c) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} - \sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}},\ x > 0$

d) $f(x) = (3^x + 5^x)^2,\ x \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = 2^x 3^{2x} 5^{2x},\ \in \mathbb{R}$

f) $f(x) = \frac{e^{5x}+32}{e^x+2},\ x \in \mathbb{R}$

g) $f(x) = \frac{1}{3+5x^2} + \frac{x^2}{5-x^2},\ x \in \mathbb{R} - \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}},\ x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2. Calculaţi integralele nedefinite

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^4-9}} dx, \qquad x > \sqrt{3}$

b) $\displaystyle\int (5x-2)^{15} dx$ c) $\displaystyle\int (2x^2 - x + 11)^{15}(4x-1)dx$

d) $\displaystyle\int \cos(5x+3)dx$ e) $\displaystyle\int 2^{4x+4} dx$

f) $\displaystyle\int (2\text{sh } x + 3\text{ch } x)dx$ g) $\displaystyle\int \frac{1}{x}(\ln x)^5 dx$

h) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x^3} dx$ i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$

3. Utilizând metoda integrării prin părţi, calculaţi integralele nedefinite:

a) $\displaystyle\int (x^2+x+1)e^x dx$ b) $\displaystyle\int (x+3)e^{2x} dx$

c) $\displaystyle\int (2x+1)3^x dx$ d) $\displaystyle\int (x^2+x+1)\cos 2x\ dx$

e) $\displaystyle\int (2x+3)\ln x\ dx,\ x>0$ f) $\displaystyle\int (x^2+x)\text{ch } 2x\ dx$

g) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\ dx$ h) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}$

i) $\displaystyle\int \text{arctg } x\ dx$ j) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+7}dx$

k) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}dx,\ x\in(-2,2)$

4. Utilizând metoda schimbării de variabilă, calculaţi integralele:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^8}dx,\ x>1$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^3+1)^2},\ x>-1$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+16},\ x\in\mathbb{R}$ d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx,\ x\in\mathbb{R}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+\ln x)},\ x>1$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln^2 x-4)},\ x>e^2$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x},\ x\in\mathbb{R}$ h) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+4}dx,\ x\in\mathbb{R}$

5. Cercetaţi dacă următoarele funcţii au primitive pe domeniul lor de definiţie:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-4}, & x\geq 2\\ x^2-2x, & x<2\end{cases}$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x=\begin{cases}x\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\max(x,x^2,x^3)$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(*x)=\begin{cases}e^x, & x\leq 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$

6. Calculaţi integralele nedefinite:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-x-3},\ x>1$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{5x^2+x+4},\ x\in\mathbb{R}$

c) $\displaystyle\int \frac{(3x+1)dx}{x^2+x+1},\ x\in\mathbb{R}$

d) $\displaystyle\int \frac{(7x-3)dx}{6x^2-x-5},\ >1$

e) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+2)^2},\ x>2$

f) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx,\ x>3$

g) $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{(x-1)^2(x+3)}dx,\ x>1$

h) $\displaystyle\int \frac{(x^5+x^4-10)dx}{x^3-4x},\ x>2$

i) $\displaystyle\int \frac{x^6}{x^4+1}dx,\ x\in\mathbb{R}$

j) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x+2}{(x-1)^4},\ x>1.$

7. Calculaţi integralele nedefinite

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+2x+3},\ x\in\mathbb{R}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6x^2-x-5}},\ x>1$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+x+2}},\ x \in \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$

d) $\displaystyle\int \frac{7x+5}{\sqrt{4x^2-3x-1}},\ x > 1$

e) $\displaystyle\int \frac{5x+4}{\sqrt{3x^2+x+2}},\ x \in \mathbb{R}$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{2x^2+x+1}},\ x \in \mathbb{R}$

g) $\displaystyle\int (x^2+x)\sqrt{3x^2-2x-1}dx,\ x > 1$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}},\ x > 1$

i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx,\ x > 0$

j) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx,\ x > 1$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})},\ x > 0$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx,\ x > 1.$

8. Calculaţi integralele definite:

a) $\displaystyle\int_1^3 x\ln x\ dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x)e^x dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}\ x)dx$ h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

i) $\displaystyle\int_0^3 |x-2|dx$ j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+9}dx$ l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{7x+3}{x^2+x+1}dx$

m) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ n) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x^2}\ln x\ dx$

9. Demonstraţi inegalităţile:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^x dx < \int_0^1 e^{x^3} dx$

b) $\displaystyle\tfrac{2}{5} < \int_0^2 \frac{x\ dx}{x^2+1} < \frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2} < \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \dfrac{\pi}{6}$, $n \in \mathbb{N}^*$

d) $\frac{2}{3} < \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx < \dfrac{5}{4}$

e) $\frac{1}{2} < \int\limits_0^1 \dfrac{-2x\ dx}{1+x^{17}} < 1$

10. Studiaţi convergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ dat de termenul general

$$a_n = \int\limits_0^1 x^n \sqrt{1-x}dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

11. Studiaţi natura şirului $I_n = \int\limits_1^e \ln^n x\ dx$, $n \in \mathbb{N}$.

12. Utilizând integrala definită, calculaţi limitele de şiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^6} \sum\limits_{k=1}^{n} k^5$.

13. Calculaţi următoarele integrale

a) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{9+x^2}$ b) $\int\limits_0^\infty e^{-2x}\sin x\ dx$

c) $\int\limits_0^1 \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}}$ d) $\int\limits_{-\infty}^x \frac{dx}{4+x^2}$

e) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ f) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

g) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ h) $\int\limits_0^1 x\ln x\ dx$

14. Precizaţi natura integralelor

a) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^8}$ b) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{2+3x^4}$ d) $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}$

e) $\int\limits_1^2 \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^3(2-x)^2}}$ f) $\int\limits_0^\infty e^{-2x}\frac{\sin 2x}{x}dx$

15. Un flux de venituri scade în timp, timp de x ani, cu rata de ae^{-bt} pe an, în t ani din momentul considerat. Să se afle valoarea de capital, ştiind că dobânda este comună continuu şi rata ei este $r\%$.

16. Rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale

a) $y'' = x^2 - e^x$, cu condiţiile $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

b) $y''' = x + 1$

c) $x^2yy' + 2 = y$

d) $y' = xy - x$ dacă $y(0) = 2$

e) $y' = xe^x(y^2+4)$

f) $y' = \frac{y^2+4}{x^2-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

g) $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$, $x \neq 0$

h) $y' + 2xy = e^{-x^2}$

i) $xy' - 3y + x^4e^x$, $x \neq 0$

j) $xy' + 3y = -\frac{2}{x}$, $y(-1) = -3$

k) $y' - 2y = 2x + 1$, $y(0) = 1$

17. Rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale liniare de ordinul doi cu coeficienţi constanţi:

a) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

b) $y'' - 14y' + 49y = 0$

c) $3y'' + y' + 4y = 0$

d) $y'' + 4y = x^2 + x$

e) $y'' - 2y' + y = x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

f) $y'' + y' = 6x^2e^x$

g) $y'' + 2y' - 3y = \cos x$

h) $y'' - y' + 2y = (2x^2 + 2x + 6)e^x$

i) $y'' + y' - 2y = (6x + 8)e^x$

j) $y'' + y' = (x^2 + 4x + 3)\cos x - 3\sin x$

k) $y'' + y' = e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

l) $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$

m) $y'' - 4y' + 4y = x^2 - x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

n) $y'' + y = 2\sin x - \cos x$

5.11 Test de verificare a cunoştinţelor nr. 5

1. Definiţi următoarele noţiuni:

   a) Primitivă a unei funcţii reale de o variabilă reală;

   b) Integrală Riemann a unei funcţii reale;

   c) Integrală improprie de speţa întâi;

   d) Ecuaţie diferenţială.

2. Se consideră funcţia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & , x \in [0,1) \\ 1 & , x = 1 \\ \ln x & , x \in (1,2] \end{cases}$$

   a) Să se arate că f este integrabilă pe $[0, 2]$;

   b) Să se calculeze $\int\limits_0^2 f(x)dx$.

3. a) Fără a calcula integrala să se demonstreze următoarea inegalitate:

$$\int\limits_0^e \ln(1+x)dx \geq \int\limits_0^e \frac{x}{1+x}dx.$$

   b) Să se arate utilizând teorema de medie că:

$$\sqrt{3} - 1 < \frac{24}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \text{tg } x}dx < 1.$$

4. a) Se dă funcţia

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}\ , \quad f(x) = \begin{cases} \min(x^2; \ln|x|) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} .$$

Să se arate că f este integrabilă şi să se calculeze $\int\limits_0^1 f(x)dx$;

b) Calculaţi $I = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x^4}{e^x + 1} dx$;

c) Calculaţi $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$;

d) Se consideră funcţia

$$f : [1,4] \to \mathbb{R}\ , \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln \sqrt[4]{x}.$$

Să se determine lungimea grafului funcţiei f şi aria suprafeţei generată prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei.

5. a) Se consideră $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $f(x) = x \cdot \text{arctg}\ x$ şi $g(x) = \ln(1 + x^2)$. Să se calculeze aria submulţimii cuprinse între graficele funcţiilor f şi g şi dreptele $x = 0$ şi $x = 1$;

b) calculaţi $\int\limits_0^2 \max\{1, \ln(1 + x^2)\} dx$;

c) Calculaţi $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\text{tg}^2 x dx$ şi apoi utilizând rezultatul obţinut să se arate că

$$8\ln 2 \geq \pi(4-\pi).$$

d) Fie $f : [0,1] \to [a,b]$ o funcţie continuă şi $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$. Să se arate că $\int\limits_0^1 f^2(x)dx \leq -a \cdot b$.

6. Aflaţi cu ajutorul calculului integral limitele şirurilor exprimate prin termenul general:

a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)\sqrt{n(n+k)}}$.

7. Calculaţi:

a) $I = \int \frac{e^x dx}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$;

b) $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$;

c) $I = \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$.

8. Să se calculeze:

a) $I = \int \frac{dx}{x^2(x^2-1)^2}$;

b) $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$;

c) $I = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{5}{8}} dx$, $x \in (1,\infty)$;

d) $I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

9. Să se calculeze $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x(1+\sin^2 x)} dx$;

10. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$, $a > 0$. Să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între axa Ox şi graficul funcţiei f.

Capitolul 6

Şiruri şi serii de funcţii

" Matematica nu e grea, greu este s-o ţii minte"
(Gr. Moisil)

Noţiunile de şir şi serie numerică pot fi extinse la şir şi serie de funcţii. În acest capitol studiem aceste extensii.

6.1 Şiruri de funcţii

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, iar $Hom(A, \mathbb{R}) = \{f | f : A \to \mathbb{R}, f\text{–funcţie}\}$.

Definiţia 6.1.1 *O aplicaţie $f : \mathbb{N} \to Hom(A, \mathbb{R})$ se numeşte şir de funcţii reale pe A.*

Notăm $f(n) = f_n$, iar pe f cu (f_n). Aşadar, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ f_n este o funcţie definită pe A cu valori reale. Rezultă că un şir de funcţii este o familie numărabilă de funcţii reale definite toate pe aceeaşi mulţime.

Funcţia f_n se numeşte termenul general de rang n al şirului de funcţii (f_n).

Definiţia 6.1.2 *Şirul de funcţii (f_n), $f_n : A \to \mathbb{R}$* **converge punctual** *(simplu) în punctul $x_0 \in A$ dacă şirul numeric $(f_n(x_0))$ este convergent.*

Notăm cu $A_c \subseteq A$ mulţimea punctelor în care şirul de funcţii (f_n) este convergent şi cu $A_d \subseteq D$ mulţimea punctelor în care şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ nu este convergent. Avem evident $A_c \cup A_d = A$ şi $A_c \cap A_d = \emptyset$. Mulţimea A_c se numeşte **mulţimea de convergentă** pentru şirul de funcţii (f_n), iar A_d se numeşte **mulţimea de divergentă**.

Exemplul 6.1.1. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$ un şir de funcţii. Pentru $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, dacă $x = 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 1$, iar dacă $|x| > 1$, atunci şirul ori nu are limită dacă $x < 1$ ori are limita $= \infty$. Aşadar $A = \mathbb{R}$, $A_c = (-1, 1]$, iar $A_d = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$.

Definiţia 6.1.3 *Dacă (f_n) este un şir de funcţii definite pe $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = A_c \cup A_d$, $A_c \neq \emptyset$, atunci pe A_c se poate defini o funcţie $f : A_c \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Funcţia f se numeşte* **limita punctuală (simplă)** *pentru şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$.*

Scriem

$$f_n \xrightarrow{p} f \quad \text{sau} \quad f_n \xrightarrow{s} f$$

şi citim f_n converge punctual (simplu) la f.

Exemplul 6.1.2. Pentru şirul de funcţii (f_n) considerat în Exemplul 6.1.1 avem $f : A_c = (-1, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-1, 1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$ şi $f_n \xrightarrow{p} f$.

Observaţia 6.1.1 *Şirul de funcţii (f_n) converge punctual la f pe A_c dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare este $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Este de remarcat că $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ depinde atât de ε cât şi de x.

Exemplul 6.1.3. Şirul de funcţii

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{3nx}{2 + nx}$$

converge simplu la funcţia

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 3 & , x > 0 \end{cases}$$

Într-adevăr, din inegalitatea

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ \dfrac{6}{2 + nx} & , x > 0 \end{cases} < \varepsilon$$

rezultă că $n_0 \in \mathbb{N}$ poate fi ales astfel

$$n_0 = n_0(\varepsilon, x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 1 + \left[\dfrac{6}{\varepsilon^x}\right] & , x > 0 \end{cases}$$

Se observă că nu este posibil să găsim un n_0 care să fie independent de x.

Observaţia 6.1.2 *Exemplul 6.1.3 arată că limita unui şir punctual convergent de funcţii continue nu este în mod necesar continuă.*

Observaţiile 6.1.1 şi 6.1.2 sugerează introducerea unui alt concept de convergenţă pentru şirurile de funcţii.

Definiţia 6.1.4 *Şirul de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$,* **converge uniform** *pe $A_n \subseteq A_c$ către funcţia $f : A_n \to \mathbb{R}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ aşa încât oricare ar fi $x \in A_n$ şi $n \geq n(\varepsilon)$ are loc inegalitatea*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Faptul că şirul (f_n) de funcţii converge uniform la funcţia f se notează prin $f_n \xrightarrow{u} f$ şi se citeşte şirul (f_n) converge uniform la f pe A_n.

Observaţia 6.1.3 *Este evident că orice şir de funcţii uniform convergent pe A_n este simplu convergent.*

Şirurile de funcţii considerate în Exemplele 6.11 şi 6.1.3 nu sunt convergente uniform.

Exemplul 6.1.4. Fie $a > 0$ un număr real fixat şi şirul de funcţii

$$f_n : A = [a, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{3nx}{2 + nx}, \quad n \geq 1.$$

Se observă că $f_n(x) \xrightarrow{p} f(x) = 3$ pe A. Cum pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) = 1 + \left[\frac{6}{\varepsilon a}\right] \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ şi orice $x \geq a$, avem

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{3nx}{2 + nx} - 3\right| = \frac{6}{2 + nx} < \frac{6}{na} < \varepsilon,$$

deducem că $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A.

Observaţia 6.1.4 *Dacă $f_n \xrightarrow{p} f$ pe A, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definiţia 6.1.5 *Şirul de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$ se numeşte* **uniform fundamental** *sau* **uniform Cauchy** *pe A dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ aşa încât pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ cu $m, n \geq n(\varepsilon)$ şi orice $x \in A$ avem $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.*

Cu ajutorul acestei noţiuni putem da **criteriul fundamental al lui Cauchy de convergenţă uniformă.**

Teorema 6.1.1 *(Criteriul Cauchy). Şirul de funcţii $f_n : A \to \mathbb{R}$ converge uniform pe A dacă şi numai dacă este uniform Cauchy pe A.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A, atunci

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pentru orice $m, n \geq n(\varepsilon)$ şi orice $x \in A$. În concluzie (f_n) este şi uniform Cauchy.

Suficienţa. Dacă (f_n) este uniform Cauchy pe A, atunci din Definiţia 6.1.5 rezultă ca pentru orice $x \in A$ şirul de numere reale $(f_n(x))$ este convergent în $\mathbb{R}$ şi deci există funcţia $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$. Vom arăta că $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A. Din $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pentru orice $x \geq n(\varepsilon)$ şi orice $x \in A$, făcând $m \to \infty$, obţinem $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, adică $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A.

O altă condiţie de convergenţă uniformă este criteriul lui Dini (v.[15]) dat de

Teorema 6.1.2 *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime compactă şi $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ continue cu $f_n \xrightarrow{p} f$ pe A. Dacă pentru orice $x \in A$ şirul numeric $(f_n(x))$ este monoton, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pe A.*

Un rezultat important în teoria convergenţei uniforme a şirurilor de funcţii este teorema următoare, datorată matematicianului german Karl Weierstrass (1815–1897).

Teorema 6.1.3 *(***Weierstrass***). Pentru orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ există un şir de funcţii polinomiale $P_n \xrightarrow{u} f$ pe $[a, b]$.*

Un astfel de şir de funcţii polinoamiale este dat de

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \geq 1$$

numit **şirul de polinoame Bernstein.**

Ne propunem acum să cercetăm proprietăţile invariante la convergenţa uniformă, adică acele proprietăţi relative la o funcţie (limită, continuitate, derivabilitate, integrabilitate) care se transmit de la termenii unui şir de funcţii uniform convergent la limita sa.

Teorema 6.1.4 (**trecerii la limită**.) *Dacă* $f_n \xrightarrow{u} f$ *pe* A *şi pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *avem* $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n$, $a \in A'$, *atunci*

a) şirul (l_n) *este convergent în* $\mathbb{R}$;

ii) există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *şi* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} l_n$

Pentru demonstraţie se arată că şirul (l_n) este şir Cauchy şi se utilizează completitudinea lui $\mathbb{R}$.

Observaţia 6.1.5 *Din Teorema 6.1.4 rezultă că avem egalitatea*

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x),$$

adică o proprietate de schimbare a ordinii de trecere la limită.

Corolarul 6.1.1 *Dacă* $f_n \xrightarrow{u} f$ *pe* A *şi pentru orice* $\in \mathbb{N}$ *funcţia* f_n *este continuă în* $a \in A$, *atunci şi funcţia limită* f *este continuă în* a.

Demonstratia Corolarului rezultă imediat utilizând Teorema 6.1.4.

Acest corolar ne arată că şi continuitatea este un invariant la convergenţa uniformă.

Teorema 6.1.5 (**Teorema de integrabilitate a şirurilor de funcţii**) *Fie* $f_n : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ *fiind un interval* f_n *continuu şi* $(f_n)_{n\geq 2}$ *uniform convergent către* f *pe* I, *atunci pentru orice* $[a,b] \subset I$ *are loc egalitatea*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Demonstraţie. Conform Corolarului 6.1.1 funcţia f este continuă pe $[a,b]$ deci integrabilă. Pentru orice $\varepsilon > 0$, ţinând seama că $f_n \xrightarrow{u} f$ pe I, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ aşa încât dacă $n \in \mathbb{N}$, $n > n(\varepsilon)$ şi $x \in I$ avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Acum rezultă

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)dx) \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

ceea ce demonstrează teorema.

Observaţia 6.1.6 *Din Teorema 6.1.2 rezultă că avem egalitatea*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx,$$

adică dacă un şir de funcţii este uniform convergent, atunci el se poate integra termen cu termen.

Această proprietate nu rămâne adevărată dacă şirul de funcţii converge numai simplu.

Exemplul 6.1.5. Şirul $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ converge simplu la $f(x) = 0$, iar

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \left. \frac{-e^{-nx^2}}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \to \frac{1}{2} \neq \int_0^1 f(x)dx = 0$$

Teorema 6.1.6 *(***Teorema de derivabilitate a şirurilor de funcţii***). Fie $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii derivabile pe $[a,b]$ cu proprietăţile:*

i) există $x_0 \in [a,b]$ *aşa încât şirul numeric* $(f_n(x_0))$ *este convergent în* $\mathbb{R}$*;*

ii) există o funcţie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *aşa încât* $f_n' \xrightarrow{u} g$ *pe* $[a,b]$.

Atunci există o funcţie derivabilă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *cu proprietăţile*

j) $f_n \xrightarrow{u} f$ *pe* $[a,b]$*;*

jj) $f' = g$ *pe* $[a,b]$.

Demonstraţie. Putem scrie

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt + f_n(x_0)$$

şi afirmaţia j) este consecinţă a Teoremei 6.1.2. Tot din această teoremă avem

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + f(x_0),$$

de unde rezultă că f este derivabilă şi $f' = g$.

Observaţia 6.1.7 *Egalitatea* $f' = g$ *din Teorema 6.1.6 se mai scrie sub forma*

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)',$$

adică într-un şir de funcţii se poate **permuta derivata cu trecerea la limită.**

De aceea Teorema 6.1.6 se mai numeşte şi **proprietatea de derivare termen cu termen** a şirurilor de funcţii.

Corolarul 6.1.2 *Dacă* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este un şir de funcţii primitivabile cu* $f_n \xrightarrow{u} f$ *pe* $[a,b]$*,a tunci* f *este primitivabilă pe acelaşi interval.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in [a, b]$, iar $F_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f_n pe $[a, b]$ cu $F_n(x_0) = 0$. Prin aplicarea Teoremei 6.1.6 şirului (F_n) rezultă că există o funcţie $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă cu $F' = f$ pe $[a, b]$, adică f este primitivabilă pe $[a, b]$.

6.2 Serii de funcţii

Acest paragraf este consacrat extinderii noţiunii de serie numerică pentru funcţii.

Definiţia 6.2.1 *Fie şirul de funcţii $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, acestui şir îi ataşăm şirul $S_n : A \to \mathbb{R}$, $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, numit* **şirul sumelor parţiale**.

Perechea de şiruri de funcţii $((f_n), (S_n))$ **se numeşte serie de funcţii generate de şirul de funcţii** f_n**.** *Notăm seria de funcţii prin* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *sau* $\sum f_n(x)$ *sau* $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + ...$

Definiţia 6.2.2 *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *este convergentă punctual (simplu) pe A dacă şirul sumelor parţiale $(S_n(x))$ este convergent.*

Altfel spus, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *este convergentă în punctul x dacă seria numerică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *este convergentă.*

Ca şi la şirurile de funcţii putem introduce mulţimea de convergenţă A_c şi mulţimea de divergenţă A_d.

Definiţia 6.2.3 *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *o serie de funcţii definite pe $A \subset \mathbb{R}$ şi A_c mulţimea ei de convergenţă. Funcţia $f : A_c \to \mathbb{R}$,*

$f(x) \stackrel{def}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *se numeşte* **suma seriei date de funcţii.**

Exemplul 6.2.1. Pentru seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in A = \mathbb{R}$, şirul sumelor parţiale este

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & , x \neq 1 \\ n + 1 & , x = 1 \end{cases}$$

care este convergent punctual pe $A_c = (-1, 1)$ la funcţia $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Există serii de funcţii care au mulţimea de convergenţă vidă.

Exemplul 6.2.2. Seria de funcţii

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + x + 1}, \quad x > 0,$$

are mulţimea de convergenţă $A_c = \emptyset$, deoarece pentru orice $a \in (0, \infty)$ seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n + a + 1}$ este divergentă.

Definiţia 6.2.4 *Seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *este* **absolut convergentă** *în punctul a dacă seria numerică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ *este absolut convergentă.*

O serie de funcţii este absolut convergentă pe o mulţime dacă ea este absolut convergentă în fiecare punct al mulţimii. Este evident că o serie absolut convergentă pe o mulţime este simplu convergentă pe acea mulţime. Reciproca nu are loc.

Exemplul 6.2.3. Seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1}$, $x > 0$ este simplu convergentă pe $(0, \infty)$ dar nu este absolut convergentă.

Definiţia 6.2.5 *Seria de funcţii* $\sum_n f_n(x)$ $x \in A$, *se numeşte uniform convergentă pe* $A_n \subseteq A$ *dacă şirul sumelor parţiale* $(S_n(x))$ *este uniform convergent pe* A_n.

Teorema 6.2.1 *(***Criteriul lui Cauchy***). Seria de funcţii* $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ *este uniform convergentă pe* $A \subseteq \mathbb{R}$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *aşa încât pentru orice* $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq n(\varepsilon)$ *şi orice* $x \in A$ *avem* $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$.

Demonstraţia rezultă prin aplicarea criteriului Cauchy (Teorema 6.1.1) pentru convergenţa uniformă a şirului sumelor parţiale ataşat seriei de funcţii $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

O consecinţă practică a criteriului lui Cauchy este criteriul lui Weierstrass pentru convergenţa uniformă a seriilor de funcţii.

Corolarul 6.2.1 *(Criteriul lui Weierstrass). Fie seria de funcţii* $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$, $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Dacă există o serie numerică* $\sum_{n \geq 1} a_n$, $a_n \geq 0$, *convergentă, astfel încât pentru orice* $n \geq 1$ *şi orice* $x \in A_n \subseteq A$ *să aibă loc inegalitatea* $|f_n(x)| \leq a_n$, *atunci seria de funcţii* $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ *este uniform convergentă pe* A_n.

Exemplul 6.2.3. Seria de funcţii

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ este uniform convergentă pe } \mathbb{R}$$

deoarece

$$\left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, şi seria numerică $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Majoritatea criteriilor de convergenţă de la seriile numerice se pot transpune, cu mici modificări, în criterii de convergenţă uniformă pentru serii de funcţii. De exemplu, criteriul lui Dirichlet (Teorema 2.2.2) ia forma:

Teorema 6.2.2 *(***Dirichlet***). Dacă şirurile de funcţii $a_n, f_n : A \to \mathbb{R}$ verifică condiţiile:*

i) există $M > 0$ aşa încât pentru orice $x \in A$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$ să avem $|f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)| \leq M$;

ii) $a_{n+1}(x) \leq a_n(x)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x \in A$;

iii) $a_n \xrightarrow{u} 0$ pe A,

atunci seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} a_{n+1}(x) f_n(x)$ converge uniform pe A.

Demonstraţia este imediată, fiind analoagă cu cea de la Teorema 2.2.2.

Deoarece convergenţa uniformă a unei serii de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ se reduce la convergenţa uniformă a şirului sumelor parţiale rezultă că rezultatele cu privire la proprietăţile invariante la convergenţa uniformă a şirurilor de funcţii conduc la proprietăţi analoage pentru serii de funcţii.

Teorema 6.2.3 *(***trecerii la limită***). Fie seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ convergentă uniform pe $A \subseteq \mathbb{R}$. Dacă pentru orice*

$n \in \mathbb{N}^*$ *avem* $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n$, $a \in A'$, *atunci seria numerică* $\sum\limits_{n \geq 1} l_n$ *este convergentă şi avem*

$$\lim_{n \to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Teorema 6.2.4 *(***Teorema de continuitate – Weierstrass***). Dacă seria de funcţii* $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$, $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *este uniform convergentă pe* A *şi* f_n *sunt continue în* $a \in A$, *atunci suma seriei este o funcţie continuă în* a.

Teorema 6.2.5 *(***Teorema de integrabilitate termen cu termen***). Dacă funcţiile* $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sunt continue pe* I *şi seria* $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ *converge uniform pe* I, *atunci pentru orice interval* $[a, b] \subset I$ *suma seriei* $\sum\limits_{n \geq 2} f_n(x)$ *este integrabilă şi are lor egalitatea*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Teorema 6.2.6 *(***Teorema de derivabilitate termen cu termen***). Fie* $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, *un şir de funcţii derivabile pe* $[a, b]$ *cu proprietăţile*

i) *există* $x_0 \in [a, b]$ *astfel ca seria numerică* $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x_0)$ *este convergentă;*

ii) *seria derivatelor* $\sum\limits_{n \geq 1} f_n'$ *converge uniform pe* $[a, b]$ *către o funcţie* g.

Atunci există o funcţie derivabilă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

j) $\sum_{n\geq 1} f_n \xrightarrow{u} f$ *pe* $[a, b]$*;*

jj) $f' = g$ *pe* $[a, b]$.

Egalitatea jj) se scrie şi sub forma

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

6.3 Serii de puteri

O serie de funcţii $\sum_{n\geq 0} f_n$ de forma $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, unde a_n şi x_0 sunt numere reale, se numeşte **serie de puteri centrată în x_0.**

Prin urmare, o serie de puteri centrată în x_0 are forma

$$\sum_{n\succ 0} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

Se observă că sumele parţiale ale unei serii de puteri centrată în x_0 sunt polinoame, ceea ce face din ele un mijloc eficient de aproximare a unei funcţii.

Dacă $x_0 = 0$, atunci seria de puteri centrată în 0 se numeşte simplu **serie de puteri**. Altfel spus, o serie de puteri are forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Observaţia 6.3.1 *Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri centrată în x_0 este nevidă deoarece conţine pe x_0.*

Teorema 6.3.1 *(**Abel** – matematician norvegian). Dacă seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este convergentă pentru* $x = b \in \mathbb{R}$, *atunci seria este absolut convergentă pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *pentru care* $|x| < |b|$.

Demonstraţie. Deoarece seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ este convergentă rezultă că şirul $(a_n b^n)$ este mărginit. Aşadar, există $M > 0$ aşa încât $|a_n b^n| < M$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă considerăm $x \in \mathbb{R}$, pentru care $|x| < |b|$, atunci putem scrie

$$|a_n x^n| = \left| a_n b^n \left(\frac{x}{b} \right)^n \right| = |a_n b^n| \left| \frac{x}{b} \right|^n < M \left| \frac{x}{b} \right|^n .$$

Seria umerică $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{b} \right|^n$ este o serie geometrică cu raţia $q = \left| \frac{x}{b} \right| < 1$, deci este convergentă. Utilizând criteriul comparaţiei, deducem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, care satisface conditia $|x| < |b|$.

Definiţia 6.3.1 *Numim* **rază de convergenţă** *a seriei de puteri* $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, *numărul nenegativ* R *definit prin*

$$R = \sup\{x \geq 0 | x \in \mathbb{R} \textit{ punct de convergenţă al seriei}\}$$

Teorema 6.3.2 *Dacă seria de puteri* $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ *are raza de convergenţă* R, *atunci*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \textit{şi} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Demonstraţie. Pentru a obţine prima dintre formule aplicăm criteriul raportului de la serii numerice cu termeni pozitivi la seria $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} |x| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot l,$$

unde

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Convergenţa seriei $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ are loc dacă $|x|l < 1$, adică pentru $|x| < \frac{1}{l} = R$.

Aşadar, avem că

$$\frac{1}{R} = l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Cea de a doua formulă se obţine aplicând criteriul rădăcinii pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$.

Corolarul 6.3.1 *Fie seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *cu raza de convergenţă* R. *Atunci seria de puteri* $\sum_{n=0} a_n (x - x_0)^n$ *centrată în* x_0 *este:*

i) absolut convergentă pentru $(x_0 - R, x_0 + R)$*;*

ii) uniform convergentă pe orice interval $(a, b) \subset (x_0 - R, x_0 + R)$*;*

iii) convergentă pe $A_c = (x_0 - R, x_0 + R)$ *sau* $A_c = [x_0 - R, x_0 + R)$ *sau* $A_c = (x_0 - R, x_0 + R]$ *sau* $A_c = [x_0 - R, x_0 + R]$*, care constituie mulţimea de convergenţă.*

Exemplul 6.3.1. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ are raza de convergenţă $R = 1$ deoarece $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. Pentru $x = 1$ şi pentru $x = -1$ seria este divergentă. Rezultă că mulţimea de convergenţă a seriei este $A_c = (-1, 1)$.

Exemplul 6.3.2. Pentru seria de puteri $\sum_{n\geq 0} \frac{(x-2)^n}{(2n+1)^3}$ centrată în 2 să aflăm mulţimea de convergenţă.

Seria de puteri $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n+1)^3}$ are raza de convergenţă $R = 1$ deoarce $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^3 = 1$. Pentru $x = 1$ seria $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^3}$ este convergentă deoarece $\frac{1}{(2n+1)^3} < \frac{1}{2n^3}$ şi seria armonică generalizată $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ este convergentă.

Pentru $x = -1$ seria $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ este convergentă conform criteriului lui Leibniz pentru serii numerice alterante. Aşadar, seria $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n+1)^3}$ are mulţimea convergentă $[-1, 1]$. Atunci, seria $\sum_{n\geq 1} \frac{(x-2)^n}{(2n+1)^3}$ are mulţimea de convergenţă dată de sistemul de inecuaţii $|x-2| \leq 1$, adică intervalul $[1, 3]$.

Ţinând seama că funcţiile $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sunt continue, derivabile şi integrabile pe $\mathbb{R}$, din teoremele 6.2.4, 6.2.5 şi 6.2.6 obţinem:

Teorema 6.3.3 *Suma oricărei serii de puteri centrată în x_0 este o funcţie continuă pe mulţimea sa de convergenţă.*

Teorema 6.3.4 *Dacă seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *centrată în* x_0 *are raza de convergenţă* R,*a tunci seria derivatelor de orice ordin este o serie de acelaşi tip cu raza de convergenţă* R.

Pentru justificare este suficient să demonstrăm că seria derivatelor $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n(x-x_0)^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ are, de asemenea, raza de convergenţă R. Avem

$$R' = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\ a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R.$$

Teorema 6.3.5 *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *cu raza de convergenţă* R. *Atunci pentru orice interval* $[a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ *avem*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left.\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b.$$

Observaţia 6.3.2 *Derivarea şi integrarea seriilor de puteri sunt utile în calcularea sumelor unor serii de funcţii sau chiar a unor serii numerice.*

Exemplul 6.3.3. Să aflăm suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

Raza de convergenţă a seriei este

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

iar mulţimea de convergenţă $(-1,1)$.

Considerăm seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ convergentă pe $(-1,1)$. Derivăm termen cu termen şi obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1).$$

Înmulţim această egalitatea cu x şi avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1),$$

pe care o derivăm din nou şi găsim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1,1).$$

De aici, prin înmulţire cu x obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1,1).$$

Pentru $x = \dfrac{1}{3}$ găsim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{3}{2}.$$

Exemplul 6.3.4. Să calculăm suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Considerăm seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ convergentă pe $(-1,1)$ la $\dfrac{1}{1-x}$. Dacă integrăm termen cu termen pe $(-1,1)$, atunci obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{n-1} dx = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx$$

sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$.

Făcând pe x să tindă la -1 în egalitatea precedentă, obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Observaţia 6.3.3 *Operaţiile cu serii de puteri se efectuează ca la operaţiile cu polinoame.*

6.4 Serii Taylor

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ o serie de puteri centrată în x_0 cu raza de covergenţă R şi suma f. Pentru orice $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ avem

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n \ldots 2a_{n+1}(x - x_0) + \ldots,$$

de unde, luând $x = x_0$, obţinem $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Am găsit că

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)$$

pentru orice $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Acum ne punem o problemă reciprocă. Fie dată o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, indefinit derivabilă într-un punct $x_0 \in I$. Acesteia îi asociem seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

centrată în x_0, numită **seria Taylor asociată funcţiei f în punctul x_0.** Pentru $x_0 = 0$ seria Taylor asociată funcţiei f în $x_0 = 0$ se numeşte **seria MacLaurin asociată funcţiei f.**

Seria Taylor asociată funcţiei f în x_0 are o mulţime de convergentă A_c. Se pune problema în ce condiţii suma acestei serii de puteri pe mulţimea A_c este funcţia f de la care am plecat.

Se observă că şirul sumelor parţiale ale seriei Taylor asociată funcţiei f în x_0 este tocmai $(T_n(f))$, unde $T_n(f)$ este polinomul Taylor de gradul n asociat funcţiei f în x_0 . Dacă $F : A_c \to \mathbb{R}$ este suma seriei Taylor asociată funcţiei f în x_0, atunci

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f)(x) = F(x) \tag{6.1}$$

pentru orice $x \in A_c$.

Să notăm cu $R_n(f)$ restul de ordinul n din formula lui Taylor. Avem

$$f(x) = T_n(f)(x) + R_n(f)(x) \tag{6.2}$$

pentru orice $x \in A_c$.

Teorema 6.4.1 *Seria Taylor asociată funcţiei f în $x_0 \in I$ are suma f pe mulţimea $A_c \cap I$ dacă şi numai dacă $R_n(f) \xrightarrow{p} 0$ pe $A_c \cap I$.*

Demonstraţie. Din egalităţile (6.1) şi (6.2) rezultă că $f = F$ pe $A_c \cap I$ dacă şi numai dacă $R_n(f) \xrightarrow{p} 0$ pe $A_c \cap I$.

Corolarul 6.4.1 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe I cu proprietatea că există $M > 0$ astfel încât $f^{(n)}(x) \le M^n$*

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \subset I$. Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor pe I centrată în orice $x_0 \in I$.

Demonstraţie. Utilizăm expresia restului formulei lui Taylor sub forma lui Lagrange şi avem

$$|R_n(f)(x)| = \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(c)| \leq \frac{M^{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

pentru orice $x, x_0 \in I$ şi c situat între x şi x_0.

Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

pentru orice $x, x_0 \in I$, rezultă că $R_n(f) \xrightarrow{p} 0$ pe I. Atunci, conform cu Teorema 6.4.1, deducem că f este dezvoltabil în serie Taylor pe I.

Definiţia 6.4.1 *O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ dezvoltabilă în serie Taylor în orice punct $x_0 \in I$ se umeşte* **analitică** *pe I.*

În final vom prezenta câteva exemple de dezvoltare în serie Taylor a unor funcţii elementare.

Exemplul 6.4.1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, se ştie că $f^{(k)}(x) = e^x$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in \mathbb{R}$,a dică f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$. În plus, dacă $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < M$, $M > 0$, atunci $|f^{(n)}(x) = e^x < e^M$, deci conform Corolarului 6.4.1 funcţia f este analitică pe $\mathbb{R}$ şi cum $f^{(n)}(x) = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, avem

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 6.4.2. Să scriem dezvoltarea în serie MacLaurin pentru funcţia $f(x) = \ln(1 + x)$, $x > -1$.

Prin inducţie matematică obţinem

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad n = 1, 2, 3\ldots,$$

de unde $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ pentru orice $n \geq 1$.

Seria MacLaurin pentru f are forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots.$$

Raza ei de convergenţă este

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

iar intervalul de convergenţă este $(-1, 1)$.

Petru $x = 1$,avem seria numerică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots,$$

adică seria armonică alternantă, care este convergentă.

Pentru $x = -1$, avem seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este opusa seriei armonice, despre care ştim că este divergentă. Aşadar, mulţimea de convergenţă a seriei de puteri este $(-1, 1]$ şi pentru orice $x \in (-1, 1]$ avem

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

De aici, pentru $x = 1$ obţinem

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots.$$

Exemplul 6.4.3. Să dezvoltăm in serie MacLaurin funcţia $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ şi $x > -1$.

Prin inducţie matematică se arată că

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

oricare ar fi $x > -1$, ceea ce ne arată că f este indefinit derivabilă. Cum

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad f(0) = 1,$$

deducem că seria MacLaurin asociată lui f are forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

Calculând raza ei de convergenţă, găsim

$$R + \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(m+1)!\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1$$

şi deci seria are intervalul de convergenţă $(-1, 1)$.

Dacă scriem restul formulei lui MacLaurin sub forma lui Lagrange, atunci se arată imediat că $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f) = 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Atunci putem scrie că

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seria astfel obţinută se numeşte seria binomială deoarece dacă $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ formula de mai sus devine formula binomului lui Newton.

Pentru diferite valori particulare ale exponentului α, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{3}, \dots$ obţinem dezvoltări în serie utile în calculele aproximative.

6.5 Probleme

1. Să se studieze convergenţa simplă şi convergenţa uniformă pentru următoarele şiruri de funcţii:

i) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{2nx}{3+nx},\ n = 1, 2, \ldots;$

ii) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{nx^2}{2+nx^2},\ n = 1, 2, \ldots;$

iii) $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{3nx}{1+nx},\ n = 1, 2, \ldots;$

iv) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$

2. Arătaţi că şirul $f_n : \left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ converge uniform la $f_n(x) = |x|$. Arătaţi că f_n este derivabilă pe $(-1, 1)$, $n = 1, 2, \ldots$ şi că f nu este derivabilă în $x = 0$. Explicaţi acest rezultat.

3. Să se studieze uniform convergenţa şirurilor de funcţii:

i) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2},\ x \in [-1, 1],\ n = 1, 2, \ldots;$

ii) $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x},\ x \in (-1, 1),\ n = 0, 1, 2, \ldots.$

4. Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă pentru seriile de funcţii:

i) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n+x+1},\ x \in \mathbb{R}_+$

ii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{1+x^n},\ x \in \mathbb{R}_+$

iii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{nx}{1+n^4x^2},\ x \in \mathbb{R}_+$

iv) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x^2},\ x \in \mathbb{R}$

v) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n,\ x \in [0,1]$

vi) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)},\ x \in \mathbb{R}_+$

vii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}, x \in (-2,\infty)$

viii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2},\ x \in \mathbb{R}$

5. Arataţi că şirul de funcţii $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ converge uniform pe $[0,1]$ şi are loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

6. Determinaţi raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă pentru seriile de puteri:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R};$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} x^n;$

iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n,\ a > 0;$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right]^\alpha \left(\frac{x-1}{2}\right)^n;$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n,\ a > 1;$

vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$.

7. Dezvoltaţi în serie de puteri MacLaurin funcţiile:

i) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x \in (-1, 1)$;

ii) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [-1, 1]$;

iii) $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$;

iv) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

v) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

vi) $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

vii) $f(x) = \dfrac{x^{10}}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$;

viii) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$.

8. Calculaţi sumele seriilor:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in (-1, 1)$;

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in (-1, 1)$;

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$, $x \in (-1, 1)$;

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$, $x \in (-1, 1)$;

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$, $x \in (-1, 1)$.

9. Calculaţi suma seriilor numerice:

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$;

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$;

iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$.

10. Utilizând dezvoltarea în serie de puteri, calculaţi:

i) $\int\limits_0^x e^{-t^2} dt$;

ii) $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$;

iii) $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

6.6 Test de verificare a cunoştinţelor nr. 6

1. Definiţi următoarele noţiuni:
   a) Şir de funcţii uniform convergent;
   b) Serie de puteri;
   c) Mulţime de convergenţă a unie serii de puteri;
   d) Serie Taylor.

2. Să se cerceteze convergenţa şirului de funcţii:
   a) $(f_n)_{n\geq 1}$ cu $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.
   b) $(f_n)_{n\geq 1}$ cu $f_n : [0,+\infty] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{ne^{nx}}$.

3. a) Să se studieze convergenţa şirurilor de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, $(f'_n)_{n\geq 1}$ cu $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\operatorname{arctg}(nx)$.
   b) Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ este punctual convergent.

4. Studiaţi convergenţa seriei de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, pentru

   $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

5. a) Să se determine mulţimea de convergenţă pentru seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\dfrac{1-x}{1-2x}\right)^n$, $x \neq \dfrac{1}{2}$.
   b) Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{n^2}$. Arătaţi că această serie de funcţii este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

6. Să se determine raza de convergenţă şi suma seriei de puteri $\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n-1}$.

7. Să se determine raza de convergenţă, mulţimea de convergenţă şi suma pentru seria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

8. Să se dezvolte în serie Mac Laurin funcţia $f(x) = e^x$ şi să se determine domeniul de convergenţă al seriei de puteri obţinute.

9. Să se dezvolte în serie Mac Laurin funcţia $f(x) = \sin x$ şi să se determine domeniul de convergenţă al seriei de puteri obţinute.

10. Scrieţi seria Taylor în punctul $x_0 = 1$ ataşată funcţiei $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{5x - 5}{x^2 - x - 6}$.

Capitolul 7

Derivarea funcţiilor de mai multe variabile

" Ce înveţi la tinereţe aceea ştii la bătrâneţe"

(Anton Pann)

În acest capitol ne propunem să extindem noţiunea de derivată la funcţiile reale de mai multe variabile reale. Vom prezenta: noţiunea de derivată parţială, derivate parţiale de ordin superior, derivarea funcţiilor compuse, teorema lui Taylor, diferenţială, aflarea extremelor simple şi determinarea extremelor condiţionate.

În mai toate situaţiile, expunerea se va face în cazul funcţiilor de două variabile, extinderea la funcţiile de n variabile, $n \geq 3$, făcându-se prin analogie.

7.1 Derivate parţiale

Să considerăm o funcţie de două variabile $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ şi $M(a_1, a_2)$ un punct din D.

Definiţia 7.1.1 *Dacă există limitele*

$$\lim_{x\to a_1}\frac{f(x,a_2)-f(a_1,a_2)}{x-a_1} \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to a_2}\frac{f(a_1,y)-f(a_1,a_2)}{y-a_2}$$

şi sunt finite, atunci spunem că funcţia f este derivabilă **parţial** *în punctul M, în cazul primei limite,* **în raport cu** *x şi în cazul al doilea,* **în raport cu** *y*.

Aceste limite se numesc respectiv **derivata parţială a funcţiei** *f* **în raport cu** *x şi* **derivata parţială a funcţiei** *f* **în raport cu** *y, în punctul $M(a_1,a_2)$. Ele se notează prin*

$$f'_x(a_1,a_2)=\frac{\partial f(a_1,a_2)}{\partial x} \quad \text{şi respectiv} \quad f'_y(a_1,a_2)=\frac{\partial f(a_1,a_2)}{\partial y}.$$

Este evident că dacă funcţia f este derivabilă în raport cu x şi respectiv cu y, atunci f este continuă în raport cu x şi respectiv în raport cu y.

Dacă funcţia f este derivabilă parţial în orice punct din domeniul D, atunci derivatele parţiale resprezintă noi funcţii de două variabile, definite pe D şi asociate funcţiei f.

Practic, pentru a calcula derivata parţială în raport cu x a funcţiei $z=f(x,y)$ se consideră f ca funcţie de x, considerându-se y constantă, şi se aplică formulele de derivare cunoscute, pentru această funcţie de variabilă x.

Pentru a calcula derivata parţială în raport cu y se consideră x constantă.

Exemplul 7.1.1. Să calculăm derivatele parţiale pentru funcţia

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2+1}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Avem

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1(x^2+y^2+1)-2x(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=$$

$$=\frac{y^2-x^2-2xy+1}{(x^2+y^2+1)^2},$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1(x^2+y^2+1) - 2y(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - y^2 - 2xy + 1}{(x^2+y^2+1)^2},$$

oricare ar fi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplul 7.1.2. Pentru funcţia $f(x,y) = x^{2y}$ definită pe $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ derivatele parţiale sunt

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2y \cdot x^{2y-1}$$

şi

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^{2y} 2 \ln x.$$

Observaţia 7.1.1 *Derivatele parţiale ale unei funcţii de n variabile, $n \geq 3$, se definesc în mod analog. Fie funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi punctul $M(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Spunem că funcţia f este* **derivabilă parţial** *în punctul M în raport cu variabila x_k, dacă*

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x - a_k}$$

există şi este finită. Această limită o numim **derivata parţială** *a funcţiei f în raport cu variabila x_k în punctul M şi o notăm prin*

$$f'_{x_k}(M) = f'_{x_k}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \textit{sau} \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial x_k}$$

O funcţie de n variabile derivabilă în fiecare punct al domeniului D este derivabilă parţial în acel domeniu şi derivatele parţiale sunt funcţii de n variabile definite în acel domeniu. Calculul lor se face pe aceleaşi principii ca la funcţiile de două variabile.

Exemplul 7.1.3. Pentru funcţia $u = \ln(x^2+y^2+z^2)$ definită pe $\mathbb{R} - \{(0,0,0)\} = D$, avem derivatele parţiale:

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \quad u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2},$$

$$u'_z = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Exemplul 7.1.4. Pentru funcţia $u = x^{y^{3z}}$ definită pe $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, y > 0, z \in \mathbb{R}\}$, derivatele parţiale sunt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^{3z} x^{y^{3z}-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^{3z}} 3z \cdot y^{3z-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^{3z}} y^{3z} \ln y \ln x.$$

Acum să introducem derivatele parţiale de ordin superior.

Derivatele parţiale pentru funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ sunt noi funcţii de două variabile. Dacă derivatele parţiale $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ sunt la rândul lor derivabile parţial în raport cu x şi y, atunci derivatele lor parţiale se numesc **derivate parţiale** de ordinul doi ale funcţiei f. Ele se notează prin

$$(f'_x)'_x = f''_{x^2} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};$$

$$(f'_x)'_y = f''_{xy} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

$$(f'_y)'_x = f''_{yx} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

$$(f'_y)'_y = f''_{y^2} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Exemplul 7.1.5. Pentru funcţia $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+3)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, avem

$$f'_x = \frac{2x}{x^2+y^2+3}, \quad f'_y = \frac{2y}{x^2+y^2+3},$$

$$f''_{x^2} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+3}\right)'_x = \frac{2(x^2+y^2+3) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2+3)^2} = \frac{2(y^2-x^2+3)}{(x^2+y^2+3)^2},$$

$$f''_{xy} = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+3}\right)'_y = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+3)^2},$$

$$f''_{yx} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2+3}\right)'_x = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+3)^2},$$

$$f''_{y^2} = \left(\frac{2y}{x^2+y^2+3}\right)'_y = \frac{2(x^2+y^2+3) - 4y^2}{(x^2+y^2+3)^2} = \frac{2(x^2-y^2+3)}{(x^2+y^2+3)^2}.$$

Se observă că derivatele f''_{xy} şi $''_{yx}$, numite şi **derivate parţiale mixte**, sunt egale. În general ele nu sunt egale. Următoarea teoremă dă condiţii suficiente ca derivatele parţiale mixte să fie egale.

Teorema 7.1.1 *(***A.Schwarz***). Dacă funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ are derivate parţiale de ordinul doi într-o vecinătate V a lui $(x,y) \in D$ şi dacă f''_{xy} este continuă în punctul (x,y), atunci $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(yx)$.*

Nu prezentăm demonstraţia acestei teoreme.

Observaţia 7.1.2 *În mod analog se definesc derivatele parţiale de ordin n, $n \geq 3$.*

Rezultatul Teoremei lui Schwarz se păstrează.

Observaţia 7.1.3 *Derivatele parţiale de ordin superior se definesc şi pentru funcţiile de n variabile, $n \geq 3$. Pentru derivatele lor mixte se păstrează afirmaţia din Teorema 7.1.1.*

Exemplul 7.1.6. Să calculăm derivatele parţiale de ordinul doi pentru funcţia

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Avem:

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$f'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$f''_{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = -\frac{yx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$f''_{xz} = f''_{zx} = -\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$f''_{yz} = f''_{zy} = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$f''_{y^2} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$f''_{z^2} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}.$$

Exemplul 7.1.7. Să calculăm $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ dacă $u = e^{xyz}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Avem

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = xe^{xyz} + xy \cdot xze^{xyz} = (x + x^2yz)e^{xyz},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1+2xyz)e^{xyz} + (x+x^2yz)yze^{xyz} =$$

$= (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$, oricare ar fi $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

7.2 Interpretări geometrice şi economice ale derivatelor parţiale

Semnificaţia geometrică a derivatelor parţiale rezultă limpede dacă le interpretăm cu ajutorul reprezentărilor geometrice. În figura 7.2.1. fie $M(a, b, f(a, b))$ un punct de pe suprafaţa $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Prin M pot fi duse două secţiuni verticale, una perpendiculară pe Oy $(y = b)$ şi cealaltă perpendiculară pe Ox $(x = a)$.

Fig.7.2.1.

Prima este o curbă de pe suprafaţă, care trece prin M în direcţia lui Ox şi arată variaţia lui z când x variază. În această secţiune valoarea lui y este b. Panta tangentei MT_x la secţiune în M este măsurată de derivata lui z ca funcţie de x, adică de derivata parţială $\frac{\partial z}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$.

La fel, valoarea $\frac{\partial z(a,b)}{\partial y} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$ măsoară panta lui MT_y, tangenta în $M(a,b)$ la secţiunea verticală a suprafeţei perpendiculară pe Ox în $x = a$.

În concluzie, derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ măsoară pantele suprafeţei $z = f(x,y)$ în două direcţii perpendiculare duse în punctul $M(a,b)$, una perpendiculară pe Oy, iar cealaltă pe Ox.

Utilizând interpretarea geometrică a derivatelor parţiale ale funcţiei $z = f(x,y)$ în punctul $M(a,b,f(a,b))$ putem scrie ecuaţia planului tangent la suprafaţa $z = f(x,y)$ în punctul $M(a,b,f(a,b))$. Acesta are forma

$$(x-a)\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = z - f(a,b).$$

Exemplul 7.2.1. Să scriem ecuaţia planului tangent la suprafaţa $z = xy + 2x - 3y + 1$ în punctul $M(1,1,1)$.

Avem

$$z'_x = y + 2, \quad z'_x(1,1) = 3,$$
$$z'_y = x - 3, \quad z'_x(1,1) = -2,$$
$$z(1,1) = 1,$$

iar ecuaţia planului tangent este:

$$(x-1)3 + (y-1)(-2) = z - 1$$

adică

$$3x - 2y - z = 0.$$

Din punct de vedere economic derivatele parţiale au interpretări analoage cu cele de la derivata funcţiilor reale de o variabilă reală.

De exemplu, dacă cererea pieţei pentru o marfă X este o funcţie de toate preţurile pieţei

$$x = f(p_1, p_2, \ldots, p_n), (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n,$$

atunci derivatele parţiale ale acestei funcţii arată variaţiile cereri când unul din preţuri variază, celelalte rămânând constante.

Elasticitatea parţială a cererii pentru X în raport cu preţul său p_x este

$$n_k = -\frac{\partial(\ln x)}{\partial(\ln p_k)} = -\frac{p_k}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial p_k},$$

care este o expresie independentă de unităţile de măsură ale cererii sau preţului. Ea dă viteza descreşterii relative a cererii pentru o creştere relativă a preţului.

Raportul x/p_k poate fi numit cerere medie, iar derivata parţială $\frac{\partial x}{\partial p_k}$, cererea marginală dată de preţul p_k în combinaţia de preţuri $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

7.3 Derivarea funcţiilor compuse

Fie $z = f(u, v)$ o funcţie de două variabile definită într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$, cu derivate parţiale continue pe D. Dacă $u = u(x)$ şi $v = v(x)$, sunt două funcţii de variabilă x, definite şi derivabile în intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$,a tunci funcţia compusă $z(x) = f(u(x), v(x))$ este derivabilă pe I şi avem formula

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot v'(x). \tag{7.1}$$

Demonstraţia formulei rezultă din egalitatea

$$\frac{z(x) - z(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(u(x), v(x)) - f(u(x_0), v(x))}{u(x) - u(x_0)} \cdot \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} +$$

$$+\frac{f(u(x_0),v(x))-f(u(x_0),v(x_0))}{v(x)-v(x_0)}\cdot\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}$$

prin trecere la limită când $x \to x_0$, x_0 fiind un punct arbitrar din I.

Derivatele de ordin superior ale acestor funcţii compuse se scriu ţinând seama de formula (7.1) şi de regulile de derivare.

Exemplul 7.3.1. Să calculăm $z^{(n)}(x)$ dacă

$$z = f(u,v), \quad u = ax+b, \quad v = cx+d, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Avem

$$z'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}v'(x) = a\frac{\partial f}{\partial u} + c\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$z''(x) = (z'(x))'_x = \left(a\frac{\partial f}{\partial u} + c\frac{\partial f}{\partial v}\right)'_x =$$

$$= a\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)'_x + c\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)'_x = a\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)u'(x) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)v'(x)\right] +$$

$$+c\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)u'(x) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)v'(x)\right] =$$

$$+a\left[a\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}c\right] + c\left[a\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + c\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] =$$

$$= a^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2ac\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial v} + c^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Simbolic acest rezultat se scrie sub forma

$$y''(x) = \left(a\frac{\partial}{\partial u} + c\frac{\partial}{\partial v}\right)^{(2)} f(u,v),$$

cu semnificaţia că se ridică binomul la pătrat şi exponenţii puterilor pentru $\frac{\partial}{\partial u}$ şi $\frac{\partial}{\partial v}$ se iau ca ordine de derivare pentru

$f(u,v)$ în raport cu u şi v.

Prin inducţie matematică se arată că

$$z^{(n)}(x) = \left(a\frac{\partial}{\partial u} + c\frac{\partial}{\partial v}\right)^{(n)} f(u,v) \qquad (7.2)$$

Pentru $n = 3$ avem

$$z^{(3)}(x) = a^3\frac{\partial^3 f}{\partial u^3} + 3a^2c\frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial v} + 3ac^2\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v^2} + c^3\frac{\partial^3 f}{\partial v^3}.$$

Funcţiile compuse considerate mai sus sunt funcţii compuse de o singură variabilă. Se pot considera funcţii din mai multe variabile. Astfel putem forma funcţia compusă de două variabile

$$z(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)), \quad (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \qquad (7.3)$$

Presupunem că funcţia $f(u,v)$ admite derivate parţiale de ordinul întâi continue şi funcţiile $u(x,y), v(x,y)$ au, de asemenea, derivate parţiale de ordinul întâi.

Utilizând (7.1) în raport cu x şi y, din (7.3) găsim:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Derivatele parţiale de ordin superior ale acestor funcţii se calculează în mod analog, ţinându-se seama că şi derivatele parţiale obţinute sunt funcţii compuse.

Aplicaţia 7.3.1. Funcţii omogene. Un polinom P de două sau mai multe variabile este omogen de gradul k, $k \in \mathbb{N}$, dacă toţi termenii polinomului sunt de gradul k. Aceste polinoame au proprietatea evidentă

$$P(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pentru orice t real.

Extindem această definiţie pentru funcţii de mai multe variabile.

Definiţia 7.3.1 *Funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variabile, definită într-un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^n$, este* **omogenă de gradul k,** *$k \in \mathbb{R}$, dacă este îndeplinită condiţia*

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{7.4}$$

oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$.

De exemplu, funcţia

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^4 + x^2y^2 + y^4}}{x^4 + y^4}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

este omogenă de gradul -2 deoarece

$$f(tx, ty) = \frac{t^2\sqrt{x^4 + x^2y^2 + y^4}}{t^4(x^4 + y^4)} = t^{-2} f(x, y),$$

oricare ar fi $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Pentru funcţiile omogene este valabil următorul rezultat:

Teorema 7.3.1 *Pentru ca funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să fie omogenă de gradul k este necesar şi suficient să avem identitatea*

$$x_1 f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + x_2 f'_{x_2}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots +$$
$$+ x_n f'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) = k f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

numită **identitatea lui Euler.**

Demonstraţie. *Necesitatea.* Funcţia f fiind omogenă de gradul k satisface (7.4). Membrul întâi al acestei relaţii este o funcţie compusă de t. Derivând ambii membrii în raport cu t, avem egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f'_{tx_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = k t^{k-1} f(x_1, \ldots, x_n)$$

care este adevărată şi pentru $t = 1$, adică

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = kf(x_1, \ldots, x_n),$$

care este tocmai indetitatea lui Euler.

Suficienţa. Considerăm funcţia auxiliară

$$F(t) = \frac{f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^k}, \quad t \neq 0$$

şi să presupunem că f satisface identitatea lui Euler.

Avem

$$F'(t) = \frac{t^k \sum_{i=1}^{n} x_i f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) - kt^{k-1} f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^{2k}} =$$

$$= \frac{t \sum_{i=1}^{n} x_i f'_{x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) - kf(tx_1, \ldots, tx_n))}{t^{k+1}} = 0$$

pentru orice $t \neq 0$.

Rezultă că $F(t)$ este o funcţie constantă. Valoarea constantei este dată de $F(1) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Atunci

$$F(t) = \frac{f(tx_1, \ldots, tx_n)}{t^k} = f(x_1, \ldots, x_n),$$

de unde

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n),$$

adică funcţia f este omogenă de gradul k.

Aplicaţia 7.3.2. Formula lui Taylor. O altă aplicaţie a derivării funcţiilor compuse este extinderea formulei lui Taylor la funcţiile de mai multe varaibile reale.

Teorema 7.3.2 *(Taylor.) Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi punctul interior $M(a_1, a_2) \in D$. Dacă funcţia f are derivate* *parţiale până la ordinul $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, într-o vecinătate $V(M)$ a lui M, atunci există punctul $P(\xi, \eta) \in V(M)$ aşa încât să aibă loc formula*

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left[(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(a_1,a_2)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)} f(\xi,\eta),$$

oricare ar fi $(x,y) \in V(M)$, numită **formula lui Taylor**

Demonstraţie. Considerăm funcţia compusă

$$F(t) = f(a_1 + t(x-a_1), a_2 + t(y-a_2)), \quad (x,y) \in V(M)$$

şi $t \in [0,1]$. Pentru $t = 0$ avem $F(0) = f(a_1, a_2)$, iar pentru $t = 1$ avem $F(1) = f(x,y)$.

Funcţia de o singură variabilă $F(t)$ este definită şi posedă derivate pe variabilă până la ordinul $(n+1)$ continue în origine şi deci se poate dezvolta după formula lui Maclaurin în jurul originii:

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta t),$$

$\theta \in (0,1)$. Pentru $t = 1$ obţinem:

$$F(1) = f(x,y) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + ... + \frac{1}{n!}F^{(n)}_{(0)} + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}_{(\theta)} \tag{7.5}$$

Utilizând formula (7.2) de la exemplul 7.3.1, obţinem

$$F^k(t) = \left[(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(a_1 + t(x-a_1),\ a_2 + t(y-a_2))$$

k= 0, 1, ..., n+ 1; de unde

$$F^k_{(0)} = \left[(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(a_1,a_2), k = \overline{0,n}.$$

Acum din (7.5) rezultă formula lui Taylor, cu $\xi = a_1 + \theta(x - a_1)$, $\eta = a_2 + \theta(y - a_2),\ \theta \in (0,1)$.

Pentru n= 0 formula lui Taylor conduce la formula creşterilor finite sau formula lui Lagrange pentru funcţiile de două variabile:

$$f(x,y) = f(a_1,a_2) + (x-a_1)f'_x(\xi,\eta) + (y-a_2)f'_y(\xi,\eta),$$

cu $\xi = a_1 + \theta(x-a_1),\ \eta = a_2 + \theta(y-a_2),\ \theta \in (0,1)$

Observaţia 7.3.1 *Formula lui Taylor pentru două variabile se poate generaliza pentru funcţiile cu m variabile, în condiţii analoage. Pentru funcţia $z = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, definită într-o vecinătate a unui punct $M(a_1, a_2, ..., a_m)$ şi care are derivate parţiale până la ordinul (n+ 1), continue, este valabilă formula lui Taylor:*

$$f(x_1,x_2,...,x_m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + (x_m-a_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k f(M) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + (x_m-a_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^{(n+1)} f(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m)$$

$\xi_1 = a_1 + \theta(x_1-a_1),\ \xi_2 = a_2 + \theta(x_2-a_2),\ \xi_m = a_m + \theta(x_m-a_m)$, $\theta \in (0,1)$.

Aplicaţia 7.3.3. Derivata după o direcţie. Fie funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M(a_1, a_2, ..., a_n)$ un punct interior din D şi vectorul $l = (l_1, l_2, ..., l_n) \in \mathbb{R}^n$, pentru care $||l||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k^2 = 1$.

Definiţia 7.3.2 *Numim* **derivata funcţiei f după direcţia l în punctul M**, *notată prin* $\frac{\partial f(M)}{\partial l}$, *numărul real definit prin*

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \lim_{x \to M} \frac{f(x) - f(M)}{d(x,M)},$$

unde $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ *iar d(X, M) este distanţa dintre punctele X şi M.*

Considerând $l = e_k = (0, ..., 1, 0, ..., 0)$*, obţinem*

$$\frac{\partial f(M)}{\partial e_k} = \frac{\partial f(M)}{\partial x_k},\ k = \overline{1, n}$$

adică derivatele parţiale ale lui f în punctul M.

Teorema 7.3.3 *Dacă funcţia* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *are derivate parţiale de ordinul întâi în raport cu fiecare din argumentele* $x_k,\ k = \overline{1, n}$*, în punctul* $M(a_1, a_2, ..., a_n) \in D$*, atunci derivata după direcţia vectorului* $l = (l_1, ..., l_n)$*, cu* $||l|| = 1$*, este*

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \frac{\partial f(M)}{\partial x_1} \cdot l_1 + \frac{\partial f(M)}{\partial x_2} \cdot l_2 + ... + \frac{\partial f(M)}{\partial x_n} \cdot l_n$$

Demonstraţie. Ţinând seamă că $X = (x_1, ..., x_n) \in D$ situat pe direcţia l se scrie sub forma $M(a_1 + tl_1, ..., a_n + tl_n),\ t \in [0, 1]$, avem

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tl_1, a_n + tl_n) - f(a_1, ..., a_n)}{t} =$$

$$= \frac{\partial f(a_1 + tl_1, ..., a_n + tl_n)}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

Folosind formula de derivare a funcţiilor compuse, putem scrie

$$\frac{\partial f(M)}{\partial l} = \frac{\partial f(M)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial(a_1 + tl_1)}{\partial t} + \frac{\partial f(M)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial(a_2 + tl_2)}{\partial t} + ...+$$

$$+ \frac{\partial f(M)}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial(a_n + tl_n)}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial f(M)}{\partial x_1} \cdot l_1 + \frac{\partial f(M)}{\partial x_2} \cdot l_2 + ... + \frac{\partial f(M)}{\partial x_n} \cdot l_n,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Exemplul 7.3.2. Să calculăm derivata $\frac{\partial f}{\partial l}$ pentru funcţia

$f(x,y,z) = xyz + x + y + z + 1,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, în punctul M(3, 2, 1), după direcţia l dată de dreapta MX, unde X(1, 3, 2).

Avem

$$MX = (1,3,2) - (3,2,1) = (-2,1,1),$$

$$||MX|| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6},\ l = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$f'_x(M) = 3,\ f'_y(M) = 4,\ f'_z(M) = 7$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M) = -\frac{6}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Aplicaţia 7.3.3. Fie $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie de două variabile. O funcţie $f : A \to B$ cu $A \times B \subseteq D$ astfel încât $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in A$ se numeşte **funcţie definită implicit** sau pe scurt **funcţie implicită**.

Cu alte cuvinte, funcţiile y= f(x) definite cu ajutorul ecuaţiilor F(x, y)= 0 se numesc funcţii implicite. O astfel de ecuaţie poate să aibă pe A una, mai multe soluţii sau nici una. Se pune problema studierii proprietăţilor (de continuitate, de derivabilitate, etc.) ale funcţiilor implicite direct de pe ecuaţia de definiţie, fără a face explicitarea lor. Teoremele care stabilesc astfel de proprietăţi se numesc **teoreme de existenţă**

Teorema 7.3.4 *Fie F o funcţie reală de două variabile definită pe $A \times B,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ şi (a_1, a_2) un punct interior lui $A \times B$ (a_1 punct interior lui A, a_2 punct interior lui B). Dacă*

i) $F(a_1, a_2) = 0$

ii) $F,\ F'_x,\ F'_y$ *sunt continue pe o vecinătate* $U \times V$ *a lui* (a_1, a_2), $U \times V \subset A \times B$;

iii) $F'_y(a_1, a_2) \neq 0$, *atunci*

1) există o vecinătate $U_0 \subseteq U$ *a lui* a_1, *o vecinătate* $V_0 \subseteq V$ *a lui* a_2 *şi o funcţie unică* $f : U_0 \to V_0,\ y = f(x)$, *astfel încât* $f(a_1) = a_2$ *şi* $F(x, f(x)) = 0$ *pentru* $x \in U_0$*;*

2) funcţia f are derivata continuă pe U_0 *dată de formula*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \ ;$$

3) dacă F are derivate parţiale de ordinul k continue pe $U \times V$*, atunci f are derivate de ordinul k continuă pe* U_0*.*

Nu prezentă demonstraţia riguroasă a acestei teoreme de existenţă. Însă dăm modalitatea practică de obţinere a derivatei f'. În acest scop , considerăm în ecuaţia $F(x, y) = 0$ pe $y = f(x)$ şi derivăm în raport cu x utilizând regula de derivare a funcţiilor compuse. Avem

$$F'_x + F'_y \cdot y'(x) = 0,$$

de unde

$$y'(x) = f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior ale funcţiei f se procedează în mod analog.

Exemplul 7.3.3. Ecuaţia $x^3 + 3xy + y^3 = 1$ defineşte pe y ca funcţie de x, pentru $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Să se calculeze $y', y'', y'(1)$ şi $y''(1)$.

Derivăm în raport cu x în ecuaţia care defineşte pe y ca funcţie de x şi avem

$$x^2 + y + xy' + y^2y' = 0.$$

De aici, pentru $x + y^2 \neq 0$, obţinem

$$y' = -\frac{x^2 + y}{x + y^2}. \tag{7.6}$$

Pentru a calcula pe y'' procedăm astfel:

$$y'' = -\frac{(2x+y')(x+y^2)-(x^2+y)(1+2yy')}{(x+y^2)^2} =$$
$$= -\frac{x^2-y+xy'-2x^2yy'-y^2y'+2xy^2}{(x+y^2)^2}.$$

Acum, înlocuim cu y' cu expresia din (7.6) şi obţinem

$$y'' = -\frac{6x^2y^2-2xy+2xy^4+2x^4y}{(x+y^2)^2}. \tag{7.7}$$

Pentru x= 1 din ecuaţia dată avem

$$1+3y(1)+(y(1))^3 = 1,$$

de unde y(1)= 0. Atunci, din (7.6) şi (7.7) obţinem $y'(1) = -1$ şi $y''(1) = 0$

Observaţia 7.3.2 *Se pot considera funcţii implicite* $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *de variabile definite printr-o ecuaţie* $F(x_1, x_2, ..., x_n, z) = 0$. *Calculul derivatelor parţiale ale lui z se obţin printr-un procedeu analog cu cel de la derivarea funcţiilor implicite de o variabilă reală.*

Exemplul 7.3.4. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia

$$2x+y+xyz = e^z$$

Derivăm în raport cu x şi y ţinând seama că z este funcţie de x şi y. Avem

$$2+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x} = e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$
$$1+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y} = e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

de unde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2+yz}{e^z-xy}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+xz}{e^z-xy},$$

dacă $e^z - xy \neq 0$.

Observaţia 7.3.3 *Există situaţii practice sau teoretice în care intervin funcţii definite implicit de sisteme de ecuaţii. Să considerăm cazul simplu a două ecuaţii cu patru variabile:*

$$F_1(x,y,u,v) = 0,$$
$$F_2(x,y,u,v) = 0.$$

În anumite condiţii, acest sistem defineşte implicit două funcţii $u = f(x,y)$ *şi* $v = g(x,y)$

Pentru calculul derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor u şi v se derivează ecuaţiile sistemului în raport cu x şi y, ţinând cont că u şi v sunt funcţii de x şi y. Avem:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Se observă că primele două ecuaţii formează un sistem liniar în necunoscutele $\frac{\partial u}{\partial x}$ *şi* $\frac{\partial v}{\partial x}$. *Ambele sisteme au ca determinant pe*

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix},$$

numit **determinantul funcţional** *sau iacobianul funcţiilor* F_1, F_2 *în raport cu u, v. Dacă* $\dfrac{D(F_1, F_2)}{D(u,v)} \neq 0$, *atunci din sistemele de mai sus se află* $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Exemplul 7.3.5. Sistemul $x + 2y + u^2 + v^2 = 6$, $x^2 + xy + 2u^3 - v^3 = 7$ defineşte pe u şi v ca funcţii de x şi y, cu u(2, 1)= 1 şi v(2, 1)= 1. Să calculăm derivatele parţiale $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ în punctul (2, 1).

Pentru a calcula $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial v}{\partial x}$ derivăm ecuaţiile sistemului în raport cu x, ţinând seama că u şi v sunt funcţii de x. Avem

$$1 + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$2x + 6u^2\frac{\partial u}{\partial x} - 3v^2\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

care este un sistem liniar în necunoscutele $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial v}{\partial x}$, cu determinantul

$$\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 6u^2 & -3v^2 \end{vmatrix} = -6uv(v + 2u).$$

Dacă $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ aşa încât $6uv(v + 2u) \neq 0$, atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2v \\ 2x & -3v^2 \end{vmatrix}}{6uv(v + 2u)} = -\frac{3v + 4x}{6u(v + 2u)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 6u^2 & 2x \end{vmatrix}}{6uv(v + 2u)} = \frac{2x - 3u}{3v(v + 2u)}$$

În mod analog, derivând ecuaţiile sistemului în raport cu y, obţinem

$$2 + 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$x + 6u^2\frac{\partial u}{\partial y} - 3v^2\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

şi dacă $6uv(v + 2u) \neq 0$, avem

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3v + x}{3u(v + 2u)}, \; \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x - 6u}{3v(v + 2u)}.$$

Dacă x= 2, y= 1, atunci sistemul dat ia forma

$$u^2(2,1) + v^2(2,1) = 2$$

$$2u^3u(2,1) - v^3(2,1) = 1$$

care are soluţia u(2, 1)= 1 şi v(2, 1)= 1.

Acum, utilizând expresiile derivatelor parţiale ale funcţiilor u şi v, găsim

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2,1) = -\frac{11}{18},\ \frac{\partial v}{\partial x}(2,1) = \frac{1}{9},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(2,1) = -\frac{5}{9},\ \frac{\partial v}{\partial y}(2,1) = -\frac{4}{9}.$$

7.4 Diferenţiala funcţiilor de mai multe variabile

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie de două variabile şi $M(a_1, a_2)$ un punct interior lui D.

Teorema 7.4.1 *Dacă funcţia f admite derivate parţiale de ordinul întâi într-o vecinătate V(M) a punctului M şi dacă aceste derivate parţiale sunt continue în M, atunci există două funcţii* $\alpha_1, \alpha_2 : V(M) \to \mathbb{R}$, *continue în M şi având proprietatea*

$$\lim_{x \to a_1,\ y \to a_2} \alpha_1(x,y) = \lim_{x \to a_1,\ y \to a_2} \alpha_2(x,y) = 0$$

astfel încât

$$f(x,y) - f(a_1,a_2) = f'_x(a_1,a_2)(x-a_1) + f'_y(a_1,a_2)(y-a_2) + \\ + \alpha_1(x,y)(x-a_1) + \alpha_2(x,y)(y-a_2). \tag{7.8}$$

Demonstraţie. Avem

$$f(x,y)-f(a_1,a_2) = [f(x,y)-f(a_1,y)]+[f(a_1,y)-f(a_1,a_2)]\,.$$

Aplicăm fiecărei paranteze drepte formula creşterilor finite şi avem:

$$f(x,y)-f(a_1,a_2) = f'_x(\xi,y)(x-a_1)+f'_y(a_1,\eta)(y-a_2),$$

unde ξ este cuprins între a_1 şi x, iar η este cuprins între a_2 şi y. Acum putem scrie

$$f(x,y)-f(a_1,a_2) = f'_x(a_1,a_2)(x-a_1)+f'_y(a_1,a_2)(y-a_1)+$$

$$+\left[f'_x(\xi,y)-f'_x(a_1,a_2)\right](x-a_1)+\left[f'_y(a_1,a_2)-f'_y(a_1,a_2)\right](y-a_2)$$

În continuare, notăm:

$$\alpha_1(x,y) = f'_x(\xi,y)-f'_x(a_1,a_2)$$

$$\alpha_2(x,y) = f'_y(a_1,\eta)-f'_y(a_1,a_2).$$

Cum din $(x,y)\to(a_1,a_2)$ rezultă $(\xi,y)\to(a_1,a_2)$ şi $(a_1,\eta)\to(a_1,a_2)$ şi deoarece f'_x şi f'_y sunt continue în $M(a_1,a_2)$ avem

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}\alpha_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}[f'_x(\xi,\eta)-f'_x(a_1,a_2)] = 0$$

şi

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}\alpha_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}[f'_y(a_1,\eta)-f'_y(a_1,a_2)] = 0$$

În final obţinem

$$f(x,y)-f(a_1,a_2) = f'_x(a_1,a_2)(x-a_1)+f'_y(a_1,a_2)(y-a_2)+$$

$$+\alpha_1(x,y)(x-a_1)+\alpha_2(x,y)(y-a_2),$$

unde funcţiile α_1 şi α_2 sunt continue în M şi

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}\alpha_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}\alpha_2(x,y) = 0.$$

Teorema este demonstrată.

Pentru (x, y) suficient de aproape de (a_1, a_2) din (7.1) avem

$$f(x, y) - f(a_1, a_2) = f'_x(a_1, a_2)(x - a_1) + f'_y(a_1, a_2)(y - a_2),$$

iar dacă notăm $x - a_1 = h$ şi $y - a_1 = k$, atunci obţinem

$$f(x, y) - f(a_1, a_2) = f'_x(a_1, a_2)h + f'_y(a_1, a_2)k.$$

Definiţia 7.4.1 *Funcţia liniară* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(h, k) = f'_x(a_1, a_2)h + f'_y(a_1, a_2)k$$

se numeşte **diferenţiala funcţiei în punctul** $M(a_1, a_2)$**.**

Notăm g prin $df(a_1, a_2)$. Dacă considerăm $f(x, y) = x$ şi $f(x, y) = y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ găsim $h = dx$ şi $k = dy$. Acum diferenţiala lui f în (a_1, b_1) ia forma

$$df(a_1, a_2) = f'_x(a_1, a_2)dx + f'_y(a_1, a_2)dy.$$

Diferenţiala funcţiei f într-un punct arbitrar $(x, y) \in D$ se scrie

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

În unele situaţii este avantajos să folosim scrierea

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) f,$$

unde produsul din dreapta este un produs între operatorul

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy,$$

numit **operator de diferenţiere** şi funcţia f.

Exemplul 7.4.1. Fie $f(x, y) = y^2 x e^{3x+y}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Avem

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = y^2(1 + 3x)e^{3x+y}dx + xy(2 + y)e^{3x+y}dy$$

Observaţia 7.4.1 *Pentru o funcţie de n variabile $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ diferenţiala se defineşte prin*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

iar operatorul de diferenţiere este

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n.$$

Uneori df se numeşte **diferenţiala totală** *a funcţiei f, iar $\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i, i = \overline{1,n}$, se numesc* **diferenţialele parţiale**.

Se observă imediat că operatorul de diferenţiere este liniar

Observaţia 7.4.2 *Metoda directă de a diferenţia o funcţie este de a folosi formula fundamentală*

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot dx_k.$$

Uneori este mai convenabil să se folosească regulile de diferenţiere, care sunt analoage cu regulile de derivare.

Exemplul 7.4.2. Să calculăm diferenţiala funcţiei $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Avem

$$du = \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{d(x^2) + d(y^2) + d(z^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dz,$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

În aplicaţii sunt utile proprietăţile diferenţialei date în următoarele două teoreme.

Teorema 7.4.2 *Condiţia necesară şi suficientă ca diferenţiala unei funcţii $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$, să fie identic nulă pe D este ca f să fie constantă pe D.*

Demonstraţie. Dacă $f(x, y) = k$, k constantă, pentru orice $(x, y) \in D$, atunci alegând pe rând x constant şi y constant, obţinem $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, deci $df = 0$ pe domeniul D. Reciproc, dacă $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$, pentru orice $(x, y) \in D$, atunci alegând pe rând x constant şi constant, obţinem $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Teorema 7.4.3 *Dacă o expresie diferenţială $E = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, cu funcţiile P şi Q continue pe domeniul $D \subseteq \mathbb{R}^2$, este diferenţiala unei funcţii $f : D \to \mathbb{R}$, pentru orice $(x, y) \in D$, atunci $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ şi $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, pentru orice $(x, y) \in D$*

Demonstraţie: Pentru orice $(x, y) \in D$ avem $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$, de unde

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - P\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - Q\right) dy = 0,$$

pentru orice $((x, y) \in D$.

De aici, utilizând Teorema 7.4.2., obţinem $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ şi $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$, oricare ar fi $(x, y) \in D$.

Observaţia 7.4.3 *Proprietăţile diferenţialei din Teoremele 7.4.2. şi 7.4.3. se menţin şi pentru funcţiile de n variabile, $n \geq 3$.*

Ca şi la funcţiile de o variabilă se pot introduce diferenţialele de ordin superior.

Definiţia 7.4.2 *Numim* **diferenţială de ordinul doi** *a unei funcţii de mai multe variabile, diferenţiala diferenţialei de ordinul întâi.*

În general, **diferenţiala de ordinul n**, $n \in \mathbb{N}^*$, *este diferenţiala diferenţialei de ordinul (n- 1).*

Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă parţial de două ori pe D, cu toate derivatele parţiale de ordinul doi continue, atunci avem

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial x}d(dx) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + d(dy)$$

Cum $d(dx) = 0$ şi $d(dy) = 0$, putem scrie

$$d^2 f = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy\right]dx +$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy\right]dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Operatorul

$$d^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2 y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right]^{(2)}$$

se numeşte **operatorul de diferenţiere de ordinul doi**. Cu ajutorul acestui operator avem

$$d^2 f = \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right]^{(2)} f.$$

Prin inducţie matematică se arată că

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right]^{(n)} f(x,y).$$

Pentru o funcţie de n variabile, diferenţiala de ordinul m are forma

$$d^m f = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right]^{(m)} f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

În caz particular, pentru m= 2 avem:

$$d^2 f = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right]^{(2)} f(x_1, ..., x_n) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}dx_1 dx_3 + ... + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}dx_1 dx_n +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}dx_2 dx_n + ... + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}dx_{n-1} dx_n.$$

Se observă că $d^2 f$ pentru o funcţie de n variabile este o formă pătratică ([1]) în variabilele $dx_1, dx_2, ..., dx_n$, care are matricea

$$H = (h_{ij})_{i,j=\overline{1,n}},$$

unde $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = \overline{1, n}$, numită **matricea hessiană** sau **matricea lui Hess**.

Observaţia 7.4.4 *În cazul funcţiilor compuse de mai multe variabile formula diferenţialei de ordinul întâi se păstrează, spunându-se că "diferenţiala de ordinul întâi este invariantă faţă de operaţia de compunere a funcţiilor". Formula pentru diferenţialele de ordin superior nu se mai păstrează pentru funcţiile compuse de mai multe variabile, adăugându-se câţiva termeni suplimentari.*

7.5 Extremele funcţiilor de mai multe variabile

Aflarea extremelor funcţiilor de mai multe variabile este una din cele mai importante probleme de matematică deoarece multe chestiuni practice (ştiinţifice, tehnice, economice etc.) conduc la optimizarea unor modele descrise prin funcţii de mai multe variabile.

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ o funcţie de două variabile.

Definiţia 7.5.1 *Un punct $M(a_1, a_2)$, $(a_1, a_2) \in D$, se numeşte punct de* **minim local (relativ)** *respectiv* **maxim local (relativ)** *al lui f dacă există o vecinătate V(M) a lui M aşa încât pentru orice $(x, y) \in V(M) \cap D$ să avem $f(x, y) \geq f(a_1, a_2)$ respectiv $f(x, y) \leq f(a_1, a_2)$.*

Cel mai mare dintre toate maximele locale se numeşte **maxim absolut***, iar cel mai mic dintre toate minimele locale,* **minim absolut***. Maximele şi minimele unei funcţii se numesc* **extremele funcţiei***.*

Teorema 7.5.1 *Fie $(a_1, a_2) \in D$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, punct de extrem local pentru funcţia $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă există derivatele parţiale f'_x şi f'_y, atunci $f'_x(a_1, a_2) = 0$ şi $f'_y(a_1, a_2) = 0$.*

Demonstraţie. Pentru $y = a_2$, funcţia $f(x, a_2)$are în punctul $x = a_1$, un punct de extrem şi este derivabilă în acest punct deci, conform teoremei lui Fermat avem $f'_x(a_1, a_2) = 0$.

În mod analog, pentru $x = a_1$, funcţia $f(a_1, y)$ are în punctul $y = a_2$ un punct de extrem şi deci $f'_y(a_1, a_2) = 0$.

Reciproca teoremei nu are loc, adică dacă $f'_x(a_1, a_2) = 0$, $f'_y(a_1, a_2) = 0$ nu rezultă că (a_1, a_2) este punct de extrem. Punctele (a_1, a_2) pentru care $f'_x(a_1, a_2) = 0$, $f'_y(a_1, a_2) = 0$ se numesc **puncte staţionare**. Aşadar, punctele de extrem ale funcţiei f se găsesc printre soluţiile sistemului $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, însă nu toate soluţiile acestui sistem sunt puncte de extrem.

Observaţia 7.5.1 *Într-un punct de extrem avem* $f'_x(a_1, a_2) = 0, f'_y(a_1, a_2) = 0,$ *deci* $df(a_1, a_2) = 0.$

Ne interesează o condiţie suficientă ca un punct staţionar să fie punct de extrem.

Teorema 7.5.2 *Fie punctul* (a_1, a_2) *interior domeniului* $D \subseteq \mathbb{R}^2$*, punct staţionar al funcţiei* $f : D \to \mathbb{R}$*. Presupunem că funcţia* f *are derivate parţiale de ordinul doi continue într-o vecinătate* $V(a_1, a_2)$ *a punctului* (a_1, a_2)*. Se consideră matricea Hess*

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

cu minorii principali

$$\triangle_1 = \frac{\partial^2 f(a_1, a_2)}{\partial x^2}, \ \triangle_2 = det\ H(a_1, a_2)$$

Cu aceste notaţii au loc afirmaţiile:

i) dacă $\triangle_1 > 0$ *şi* $\triangle_2 > 0$*, atunci punctul* (a_1, a_2) *este punct de minim local pentru* f*;*

ii) dacă $\triangle_1 < 0$ *şi* $\triangle_2 > 0$*, atunci punctul* (a_1, a_2) *este punct de maxim local pentru* f*;*

iii) dacă $\triangle_2 < 0$*, atunci punctul* (a_1, a_2) *nu este punct de extrem.*

Demonstraţie. Natura punctului staţionar (a_1, a_2) este dată de semnul diferenţei $f(x, y) - f(a_1, a_2)$. Ţinând seama că $f'_x(a_1, a_2) = 0$, $f'_y(a_1, a_2) = 0$, din formula lui Taylor pentru n= 2 (Teorema 7.3.2) avem $f(x, y) = f(a_1, a_2)+$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x - a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (y - a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(a_1, a_2) + R_2(f, x, y)$$

pentru $(x, y) \in D \cap V((a_1, a_2))$. Dacă (x, y) este suficient de aproape de punctul (a_1, a_2), atunci semnul diferenţei $f(x, y) -$

$f(a_1, a_2)$ nu este influenţat de restul $R_2(f, x, y)$ al formulei. Aşadar, avem

$$f(x, y) - f(a_1, a_2) = \frac{1}{2}\left[(x - a_1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) + \right.$$

$$\left. +2(x - a_1)(y - a_2)\frac{\partial^2 f(a_1, a_2)}{\partial x \partial y} + (y - a_2)^2 \frac{\partial^2 f(a_1, a_2)}{\partial y^2}\right],$$

care este o formă pătratică în variabilele $x - a_1$ şi $y - a_2$, având matricea chiar hessiana. Conform rezultatelor cunoscute de la formele pătratice ([1]), avem că:

i) dacă $\triangle_1 > 0$ şi $\triangle_2 > 0$, atunci forma pătratică este pozitiv definită, adică diferenţa $f(x, y) - f(a_1, a_2) > 0$ pentru $(x, y) \neq (a_1, a_2)$, deci $f(x, y) > f(a_1, a_2)$ şi, prin urmare, punctul (a_1, a_2) este punct de minim;

ii) dacă $\triangle_1 < 0$ şi $\triangle_2 > 0$, atunci forma pătratică este negativ definită, adică diferenţa $f(x, y) - f(a_1, a_2) < 0$ pentru $(x, y) \neq (a_1, a_2)$, deci $f(x, y) < f(a_1, a_2)$ şi, prin urmare, punctul (a_1, a_2) este punct de maxim local;

iii) dacă $\triangle_2 < 0$, atunci forma pătratică este nedefinită, deci (a_1, a_2) nu este punct de extrem local

Exemplul 7.5.1. Să determinăm punctele de extrem local pentru funcţia

$$f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mai întâi determinăm punctele staţionare. Pentru aceasta calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 5y, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - 5x.$$

Egalându-le cu zero, avem sistemul

$$x^4 = y, \quad y^4 = x,$$

care are soluţile (0, 0) şi (1, 1). Acestea sunt punctele staţionare ale funcţiei f. Printre acestea se vor afla punctele de extrem ale funcţiei f. Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi ale lui f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20x^3, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -5, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20y^3.$$

Prin urmare, matricea hessiană este

$$\begin{pmatrix} 20x^3 & -5 \\ -5 & 20y^3 \end{pmatrix}.$$

Pentru punctul staţionar (0, 0) se obţine

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \ \triangle_1 = 0, \ \triangle_2 = -25 < 0$$

deci punctul (0, 0) nu este punct de extrem local.

Pentru punctul staţionar (1, 1) se obţine

$$\begin{pmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}, \ \triangle_1 = 20 > 0, \ \triangle_2 = 375 > 0,$$

deci (1, 1) este punct de minim local şi avem $f_{min} = f(1,1) = -3$.

Observaţia 7.5.2 *În cazul unei funcţii* $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geq 3$, *se procedează în mod analog.*

Punctele ei staţionare se află printre soluţiile sistemului

$$f'_{x_1} = 0, \ f'_{x_2} = 0, \ ..., f'_{x_n} = 0$$

Dacă $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ *este un punct staţionar al funcţiei f, atunci pentru precizarea naturii lui se consideră matricea Hess*

$$H = (h_{ij})_{i,j} = \overline{1, n},$$

unde $h_{ij} = f''_{x_i x_j}(A),\ i,j = \overline{1,n}$. *Notăm minorii ei principali cu* $\triangle_k$, *adică*

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & ... & h_{1k} \\ h_{21} & h_{22} & ... & h_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ h_{k1} & h_{k2} & ... & h_{kk} \end{vmatrix},\ k = \overline{1,n}$$

Cu aceste notaţii, conform cu cele cunoscute de la formele pătratice ([1]) avem:

i) dacă $\triangle_k > 0,\ k = \overline{1,n}$, *atunci punctul A este punct de minim local pentru funcţia f, (condiţie echivalentă cu* $d^2f(A) > 0$ *);*

ii) dacă $\triangle_1 < 0, \triangle_2 > 0, \triangle_3 < 0, ..., (-1)^n\triangle_n > 0$, *atunci punctul A este punct de maxim local pentru funcţia f (condiţie echivalentă cu* $d^2f(A) < 0$*);*

iii) dacă $\triangle_2 < 0$, *atunci punctul A nu este punct de extrem local (condiţie echivalentă cu* $d^2f(A)$ *nu este definită).*

Exemplul 7.5.2. O firmă produce trei sortimente de produse, în cantităţile x, y, şi z.

Dacă funcţia profitului este dată de

$$f(x,y,z) = 170x+110y+120z-3x^2-2y^2-\frac{3}{2}z^2-2xy-xz-yz-50,$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,$$

atunci să se determine volumele celor trei produse astfel încât profitul să fie maxim.

Mai întâi aflăm punctele staţionare ale lui f, prin rezolvarea sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = 170 - 6x - 2y - z = 0 \\ f'_y(x,y,z) = 110 - 4y - 2x - z = 0 \\ f'_z(x,y,z) = 120 - 3z - x - y = 0 \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este x= 20, y= 10 şi z= 30. Aşadar, funcţia f are un singur punct staţionar A(20, 10, 30).

Pentru a stabili natura punctului A calculăm derivatele parţiale de ordinul doi ale lui f.

$$f''_{x^2} = -6,\ f''_{y^2} = -4,\ f''_{z^2} = -3$$

$$f''_{xy} = f''_{yz} = -2,\ f''_{xz} = f''_{zx} = -1,\ f''_{yz} = f''_{zy} = -1$$

şi scriem hessiana

$$H = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Minorii principali ai lui H în punctul A au valorile

$$\triangle_1 = -6 < 0,\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

$$\triangle_3 = det\ H = -54 < 0.$$

Rezultă că punctul A este un punct de maxim. Valoarea maximă a profitului este $f_{max} = f(20, 10, 30) = 4000$.

7.6 Extreme condiţionate

Multe probleme practice conduc la aflarea punctelor de extrem supuse unor condiţii (legături).

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ z = f(x, y)$ o funcţie de două variabile şi fie $F(x, y) = 0$ o ecuaţie, unde $F : D \to \mathbb{R}$. Notăm cu A mulţimea soluţilor ecuaţiei $F(x, y) = 0$.

Definiţia 7.6.1 *Un punct $(a_1, a_2) \in A$ este* **punct de extrem condiţionat** *(cu legături) al funcţiei f dacă există o vecinătate V a punctului (a_1, a_2) astfel încât pentru orice $(x, y) \in A$ se verifică una din inegalităţile:*

$f(x, y) \leq f(a_1, a_2)$, *pentru maxim local condiţionat;*
$f(x, y) \geq f(a_1, a_2)$, *pentru minim local condiţionat.*

Geometric, problema punctelor de extrem condiţionate cere să determinăm punctele curbei dată de ecuaţia F(x, y)= 0, în care ia valori extreme, în comparaţie cu celelalte valori ale sale în punctele de pe această curbă.

Acum să presupunem că funcţia F îndeplineşte condiţiile necesare existenţei unei funcţii implicite. Fie $y = \varphi(x)$ funcţia implicită definită de $F(x, y) = 0$. Atunci problema găsiri punctelor de extrem condiţionate ale funcţiei f revine la aflarea punctelor de extrem ale funcţiei $z(x) = f(x, \varphi(x))$, pe un anumit interval precizat.

Punctele staţionare, printre care se găsesc şi posibile puncte de extrem condiţionate sunt soluţiile reale ale ecuaţiei

$$z'(x) = f'_x + f'_y y' = 0, \tag{7.9}$$

unde y' este derivata funcţiei implicite definită de ecuaţia $F(x, y) = 0$

$$F'_x + F'_y y' = 0 \tag{7.10}$$

Soluţiile sistemului dat de ecuaţiile (7.9) şi (7.10) găsim

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{F'_x}{F'_y}$$

În concluzie, punctele staţionare ale funcţiei f sunt punctele ale căror coordonate verifică ecuaiile

$$\frac{f'_x}{F'_x} = \frac{f'_y}{F'_y};\ F(x, y) = 0.$$

Pentru rezolvarea acestui sistem notăm cu $-\lambda$ valoarea celor două rapoarte şi obţinem sistemul:

$$\begin{cases} f'_x + \lambda F'_x = 0 \\ f'_y + \lambda F'_y = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}. \tag{7.11}$$

La sistemul (7.11) putem ajunge şi pe cale formală. Considerăm funcţie auxiliară

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda F(x, y),$$

numită **funcţia lui Lagrange**, unde λ este un parametru auxiliar, numit **multiplicatorul lui Lagrange**. Căutăm punctele staţionare ale funcţiei $L(x, y)$ cu legătura $F(x, y) = 0$, obţinând sistemul

$$\begin{cases} L'_x = f'_x + \lambda F'_x = 0 \\ L'_y = f'_y + \lambda F'_y = 0 \\ F(x, y) = 0 \quad , \end{cases}$$

adică tocmai sistemul (7.6.3).

Din cele de mai sus deducem că dacă (a_1, a_2, λ_1) este un punct staţionar condiţionat al funcţiei auxiliare L, atunci (a_1, a_2) este punct staţionar condiţionat al funcţiei date f.

Pentru precizarea naturii punctelor de extrem condiţionat se cercetează semnul diferenţei $f(x, y) - f(a_1, a_2)$ în vecinătatea punctului (a_1, a_2), ţinând seama de legătura dată. Aceasta revine la studierea semnului diferenţialei a doua a funcţiei lui Lagrange, $d^2L(x, y)$, ţinând cont de dF= 0.

Această metodă de aflare a punctelor de extrem condiţionate se numeşte **metoda multiplicatorilor lui Lagrange**.

Exemplul 7.6.1. Să se înscrie într-un cerc un dreptunghi de arie maximă.

Fie cercul de rază a, $a > 0$, cu centrul în origine (fig. 7.6.1)

Fig.7.6.1.

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Notând cu x, y coordonatele unui vârf al dreptunghiului, ţinând seama de simetria figurii, aria dreptunghiului înscris este $z = 4xy$

Problema propusă se formulează astfel: să se afle extremele funcţiei $z = 4xy,\ x > 0,\ y > 0$, cu condiţia $x^2 + y^2 = a^2$.

Utilizăm metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Considerăm funcţia auxiliară

$$L(x, y) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - a^2)$$

şi formăm sistemul

$$\begin{cases} L'_x = 4y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 4x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

Sistemul are soluţia

$$\lambda = -2,\ x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Pentru a preciza natura punctului staţionar condiţionat $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\ \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ cercetăm semnul diferenţialei a doua a funcţiei auxiliare.

Avem

$$d^2L = L''_{x^2}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}dy^2 =$$

$$= 2\lambda dx^2 + 8dxdy + 2\lambda dy^2$$

şi

$$d^2L\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = -4(dx^2 - 2dxdy + dy^2)$$

Diferenţiind relaţia de legătură avem

$$2xdx + 2ydy = 0,$$

de unde $dy = -\frac{x}{y}dx$. Pentru $x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ găsim dy= -dx. Atunci, înlocuind în d^2L, găsim

$$d^2L\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = -8dx^2 < 0,$$

ceea ce ne arată că punctul $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ este un maxim condiţionat.

Am găsit că dreptunghiul de arie maximă înscris în cercul $x^2 + y^2 = a^2$ este pătratul de latură $2x = a\sqrt{2}$ şi arie $z_{max} = 2a^2$.

Să considerăm acum cazul general al aflări extremelor funcţiei

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

cu $m, m < n$, condiţii de legătură

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ F_2(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Metoda directă de aflare a extremelor condiţionate constă în a exprima m argumente în funcţie de celelalte n- m şi a le înlocui în f. Obţinem o funcţie de n-m variabile ale cărei puncte de extrem local vor fi puncte de extrem condiţionate pentru f.

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange constă în considerarea funcţiei auxiliare

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) + \lambda_1 F_1(x_1, ..., x_n) +$$

$$+\lambda_2 F_2(x_1, ..., x_n) + ... + \lambda_m F_m(x_1, ..., x_n),$$

unde parametrii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ se numesc multiplicatorii lui Lagrange.

Apoi, se determină punctele staţionare ale funcţiei L din condiţiile

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

la care se adună legăturile

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Avem un sistem de n+m ecuaţii cu n+m necunoscute: $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., x_m$.

Dacă $x_i = a_i,\ i = \overline{1,n}$ şi $\lambda_j = \lambda_j^*,\ i = \overline{1,n}$, este o soluţie a sistemului, atunci punctul $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ este punct staţionar condiţionat pentru funcţia f.

Pentru precizarea naturii lui A, în diferenţiala de ordinul doi

$$d^2L(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(A)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$$

se introduc legăturile date prin diferenţialele legăturilor

$$dF_k(A) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_k(A)}{\partial x_i}dx_n = 0,\ k = \overline{1,m}$$

Forma pătratică $d^2L(A)$ astfel obţinută se aduce la forma canonică. Dacă $d^2L(A) > 0$, atunci punctul A este punct de minim local condiţionat pentru funcţia f, iar dacă $d^2L(A) < 0$, atunci A este punct de maxim local condiţionat pentru funcţia f.

Exemplul 7.6.2.Să se afle punctele de extrem legate pentru funcţia

$$f(x, y, z) = xyz,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

cu legăturile

$$x + y - z = 3,\ x - y - z = 8.$$

Metoda directă Din sistemul

$$\begin{cases} y - z = 3 - x \\ y + z = x - 8 \end{cases}$$

găsim $y = -\frac{5}{2}$ şi $z = \frac{2x-11}{2}$.

Înlocuind în f găsim funcţia

$$h(x) = x(-\frac{5}{2})\frac{2x-11}{2} = \frac{-10x^2 + 55x}{4},\ x \in \mathbb{R}$$

Aflăm punctele de extrem local pentru funcţia h. Din $h'(x) = 0$, obţinem $x = \frac{11}{4}$. Cum $h'' = -\frac{5}{2} < 0$, deducem că $x = \frac{11}{4}$ este punct de maxim pentru h.

Atunci punctul $x = \frac{11}{4}$, $y = -\frac{5}{2}$, $z = -\frac{11}{4}$ este punct de maxim condiţionat pentru f, cu $f_{min} = \frac{605}{32}$

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Considerăm funcţia Lagrange auxiliară

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x + y - z - 3) + \lambda_2(x - y - z - 8)$$

Determinăm punctele staţionare ale lui L din ecuaţiile

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

la care se adaugă legăturile

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y - z = 8 \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este:

$$x = \frac{11}{4},\ y = -\frac{5}{2},\ z = -\frac{11}{4},\ \lambda_1 = \frac{11}{32},\ \lambda_2 = -\frac{231}{32}.$$

Punctul staţionar condiţionat pentru f este $A\left(\frac{11}{4},\ -\frac{5}{2},\ -\frac{11}{4}\right)$.

Pentru a decide natura lui A calculăm d^2L. Avem

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} +$$

$$+2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}dydz =$$
$$= 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz;$$

care în punctul A este:

$$d^2L(A) = -\frac{11}{2}dxdy - 5dxdz + \frac{11}{2}dydz.$$

Prin diferenţierea celor două legături rezultă relaţiile:

$$dx + dy - dz = 0$$

$$dx - dy - dz = 0,$$

de unde găsim $dz = dx,\ dy = 0$, care substituite în $d^2L = -5dx^2 < 0$. Rezultă că punctul A este punct de maxim condiţionat pentru funcţia f. Se observă că am obţinut acelaşi rezultat ca şi la metoda directă.

Exemplul 7.6.3.Să considerăm funcţia de producţie dată prin

$$f(x, y) = x^{0,2}y^{0,7},$$

x reprezentând capitalul, iar y forţa de muncă. Ne propunem să determinăm producţia maximă cu restricţia $2x + 5y = 360$

Utilizăm metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Funcţia auxiliară a lui Lagrange este

$$L(x, y) = x^{0,2}y^{0,7} + \lambda(2x + 5y - 360).$$

Pentru determinarea punctelor staţionare condiţionate avem sistemul:

$$\begin{cases} L'_x = 0,2 \cdot x^{-0,8} \cdot y^{0,7} + 2\lambda = 0 \\ L'_y = 0,7 \cdot x^{0,2} \cdot y^{-0,3} + 5\lambda = 0 \\ 2x + 5y = 360 \end{cases}$$

Dacă se exprimă λ din fiecare din primele două expresii, atunci se obţine că $y = \frac{7}{5}x$. Acum din ecuaţia de legătură se obţine $x = 40,\ y = 56$. Pentru λ găsim valoarea $-\frac{1}{10}40^{-0,8} \cdot 50^{0,7}$.

Diferenţiala de ordinul doi al funcţiei L este $D^2L =$

$$= -0,16 \cdot x^{-1,8}y^{0,7}dx^2 + 2 \cdot 0,14x^{-0,8}y^{-0,3}dxdy - 0,21x^{0,2}y^{-1,3}dy^2$$

Prin diferenţierea relaţiei de legătură avem $2dx + 5dy = 0$, de unde $dy = -\frac{2}{5}dx$. Înlocuind pe $x = 40,\ y = 56$ şi $dy = -\frac{2}{5}dx$ în d^2L, obţinem

$$d^2L(40, 56) = -(40^{-1,8}56^{0,7} + 0,28 \cdot 40^{-0,8}56^{-0,3}+$$

$$+0,21 \cdot 40^{0,2} \cdot 56^{-1,3})dx^2 < 0$$

ceea ce ne arată că punctul $x = 40$, y=56 este un punct de maxim local condiţionat. Valoarea maximă pentru f este

$$f_{max} = f(40, 56) = 40^{0,2} \cdot 56^{0,7}$$

.

7.7 Ajustarea unor date

Adesea în urma unor experimente obţinem pentru două marimi x şi y următorul tabel de valori

x	x_1 x_2 ... x_n
y	y_1 y_2 ... y_n

Încercăm să exprimăm legătura dintre variabilele x şi y printr-o funcţie continuă $y = f(x, a_1, ..., a_m)$, unde $a_1, a_2, ..., a_m$ sunt parametrii care urmează să fie determinaţi aşa încât $f(x_i, a_1, ..., a_m)$ să aproximeze cât mai bine valorile $y_i, i = \overline{1, n}$. În acest scop se foloseşte **metoda celor mai mici pătrate**. Aceasta constă în a determina parametrii $a_1, a_2, ..., a_m$ aşa încât suma pătratelor erorilor comise să fie minimă, adică

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a_1, ..., a_n))^2 = min.$$

Detreminarea valorilor $y_i = f(x_i, a_1, ..., a_m)$ aşa încât ele să aproximeze cât mai bine valorile y_i, $i = \overline{1, n}$, se numeşte ajustare. Funcţia $y - f(x, a_1, ..., a_m)$ e **funcţie de ajustare**. De obicei, forma funcţiei de ajustare se alege din reprezentarea grafică a perechilor de puncte (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$, obţinute experimental.

Problema determinării parametrilor $a_1, a_2, ..., a_m$ este o aplicaţie a problemei aflări extremelor funcţiei de m variabile

$$S(a_1, a_2, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a_1, ..., a_m))^2.$$

Se constată imediat că punctele de staţionare sunt puncte de minim, iar ecuaţiile care dau aceste puncte numite **ecuaţii normale**, sunt

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a_1, ..., a_m)) \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a_1, ..., a_m)) \frac{\partial f}{\partial a_m} = 0 \end{cases}$$

Să considerăm cazul cel mai simplu, în care funcţia de ajustare este de gradul întâi, adică $y = ax + b$.

Trebuie să determinăm a şi b aşa încât

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

să fie minimă. Condiţiile de minim

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0,$$

conduc la sistemul liniar

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases},$$

cu necunoscutele a şi b.

Dacă împărţim ambele ecuaţii cu n şi notăm

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \ \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n},$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}, \ \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n},$$

atunci sistemul liniar ia forma

$$\begin{cases} \overline{x^2}a + \overline{x}b = \overline{xy} \\ \overline{x}a + b = \overline{y}. \end{cases}$$

Prin eliminarea lui b, găsim

$$(\overline{x^2} - \overline{x}^2)a = \overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}.$$

Dacă notăm $\sigma_x^2 = \overline{x}^2 - \overline{x}^2$, numită **dispersia lui** x, şi $\overline{c}_{xy} = \overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}$, mărime numită **corelaţia variabilelor** x **şi** y, atunci avem

$$a = \frac{\overline{c}_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \frac{\overline{c_{xy}}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot r_{xy}$$

Raportul $r_{xy} = \frac{\overline{c}_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ se numeşte **coeficient de corelaţie** a variabilelor x, y şi măsoară intensitatea dependenţei liniare dintre variabilele x şi y.

Obervăm că $b = \overline{y} - a\overline{x}$ şi avem $y = a(n - \overline{x}) + \overline{y}$, de unde

$$y = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r_{xy}(x - \overline{x}),$$

care este dreapta care ajustează cel mai bine datele iniţiale. Dreapta găsită este numită **dreapta de regresie**.

Exemplul 7.7.1. Să se ajusteze cu o dreaptă datele ce reprezintă numărul de piese produse în cele cinci zile de lucru dintr-o săptămâmă, date trecute în tabelul

zilele	1	2	3	4	5
numărul de piese	4	5	7	6	6

Notăm cu y numărul de piese şi cu x zilele săptămânii. Avem $n = 5,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$, şi $y_1 = 4,\ y_2 = 5,\ y_3 = 7, y_4 = 6, y_5 = 6$.

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3;\ \overline{y} = \frac{4+5+7+6+6}{5} = \frac{28}{5}$$

$$\overline{xy} = \frac{4+10+21+24+30}{5} = \frac{89}{5}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 11 - 9 = 2$$

$$\overline{c}_{xy} = \frac{89}{5} - 3 \cdot \frac{28}{5} = \frac{89-84}{5} = 1$$

$$a = \frac{\overline{c}_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{1}{2};\ b = \overline{y} - a\overline{x} = \frac{28}{5} - \frac{3}{2} = \frac{41}{10}$$

$$\text{şi } y = \frac{x}{2} + \frac{41}{10}.$$

Observaţia 7.7.1 *Ajustarea datelor se poate folosi şi în rezolvarea problemelor de prognoză. Având găsită funcţia de ajustare, putem evalua mărimea valorii y şi în alte puncte.*

Astfel, în exemplul 7.7.1 putem prognoza care să fie numărul de piese în ziua a şasea.

Avem $y = \frac{6}{2} + \frac{41}{10} = 3 + 4 + \frac{1}{10} = 7 + \frac{1}{10}$, de unde rezultă că în ziua a şasea atrebui să se producă 7 piese.

7.8 Interpolarea funcţiilor

Ca şi în cazul ajustărilor, să presupunem că pentru mărimea y, care variază continuu în raport cu mărimea x, cunoaştem tabelul de valori

x	$x_0\ x_1\ \ldots\ x_n$
y	$y_0\ y_1\ \ldots\ y_n$

, $n \geq 1$,

cu $x_i \in [a,b],\ i=\overline{0,n}$, distincte două câte două.

Prin **interpolare** înţelegem procesul de alegere a unei funcţii $I : [a,b] \to \mathbb{R}$, dintr-o anumită clasă de funcţii, aşa încât $I(x_i) = y_i,\ i=\overline{0,n}$ se numeşte **funcţie de interpolare**.

Ţinând seama că cele mai simple şi convenabile funcţii sunt polinoamele vom alege funcţie de interpolare un polinom P. O vom numi în continuare **polinom de interpolare**.

Având în vedere că avem n+ 1 condiţii $P(x_i) = y_i,\ i=\overline{0,n}$, alegem

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Cele n+ 1 condiţii conduc la sistemul liniar

$$\begin{cases} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + ... + a_{n-1}x_0 + a_n = y_0 \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + ... + a_{n-1}x_1 + a_n = y_1 \\ .... \quad .... \quad .... \quad .... \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + ... + a_{n-1}x_n + a_n = y_n \end{cases}$$

în necunoscutele $a_0, a_1, ..., a_n$.

Determinantul sistemului este determinantul Vandermond

$$V(x_0, x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & ... & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & ... & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & ... & x_n & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{0\le j<i\le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Rezultă că sistemul determină coeficienţii $a_i,\ i=\overline{0,n}$, ai polinomului P în mod unic.

Pentru polinomului P de interpolare există mai multe forme. O formă simplă şi uşor de aplicat în cazurile practice a fost dată de Lagrange.

El a introdus **polinoamele fundamentale** $l_i,\ i=\overline{0,n}$, de grad n date prin expresiile

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)},\ i=\overline{0,n}$$

Se observă imediat că

$$l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0,\ j\neq i\\ 1,\ j=i\end{cases}$$

Utilizând polinoamele fundamentale polinomul de interpolare Lagrange are forma

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)y_i$$

Întradevăr, avem

$$P(x_j)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x_j)y_i=y_j,\ j=\overline{0,n}$$

Exemplul 7.8.1. Să determinăm polinomul de interpolare pentru datele din tabelul

x	1	2	3	4
y	3	2	4	5

şi apoi calculaţi valoarea lui y pentru $x=\frac{3}{2}$

Avem $n=3,\ x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4$, şi $y_0=3$, $y_1=2,\ y_2=4,\ y_3=5$.

Polinoamele fundamentale sunt:

$$l_0(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}=\frac{(x^2-5x+6)(x-4)}{-6}=$$

$$=-\frac{1}{6}(x^3-9x^2+26x-24),$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{(x^2-4x+3)(x-4)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(x^3 - 8x^2 + 19x - 12),$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} = \frac{(x^2-3x+2)(x-4)}{-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8),$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \frac{(x^2-3x+2)(x-3)}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

Atunci polinomul de interpolare are expresia

$$P(x) = -\frac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 26x - 24)\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot(x^3 - 8x^2 + 19x - 12)\cdot 2 -$$

$$-\frac{1}{2}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)\cdot 4 + \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\cdot 5 =$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - \frac{27}{2}x + 11$$

Acum, avem

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{8} = y.$$

Observaţia 7.8.1 *Dacă pentru valorile y în funcţie de valorile lui x, date la începutul acestui paragraf, există o funcţie continuă $y = f(x)$, cu $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$, atunci polinomul de interpolare este o aproximare a funcţiei f care satisface condiţiile $P(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$.*

7.9 Probleme

1. Utilizând definiţia, calculaţi derivatele parţiale de ordinul întâi, în punctele precizate, pentru următoarele funcţii:

a) $f(x, y) = x^3 + 2y^2 + xy$, în punctul (1, 2);

b) $f(x, y, z) = xyz - x^3 + y^3 + xy$, în punctul (1, 2, 3)

c) $f(x, y) = 2\sin(2x + y) + 3y$, în punctul (0, 0)

d) $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + 2y^2$, în (1, 1)

2. Calculaţi derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi pentru funcţiile:

a) $f(x, y) = x^6 + y^6 - 5x^2y + 2xy^2 - xy + 3x + 4y - 6$;

b) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$;

c) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$;

d) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

e) $f(x, y) = 2^{xy}$

f) $f(x, y) = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$;

g) $f(x, y) = \ln(x + \ln y)$;

h) $f(x, y) = e^{-\frac{y}{x}}$;

i) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

j) $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$;

k) $f(x, y, z) = (xy)^z$;

l) $f(x, y, z) = e^{3x+2y+4z}$;

m) $f(x, y) = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3. Arătaţi că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate în dreptul fiecăreia:

a) $u = \ln(x^2 + y^2)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

b) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$;

c) $u = \frac{a}{\sqrt{x}} e^{-\dfrac{y^2}{4b^2 t}}$, a, b constante, $\frac{\partial u}{\partial x} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

d) $u = x^y y^x$, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = (x + y + \ln u) \cdot u$;

e) $u = \ln(e^x + e^y)$, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$.

4. Scrieţi ecuaţia planului tangent la suprafeţele următoare, în punctele indicate:

a) $z = xy$, în punctul (1, 1, 1)

b) $z = x^2 + y^2$, în punctul (1, 2, 5)

c) $z = xy + x^2 + y^2 + 2x - 3y - 5$, în punctul (1, 2, -2)

5. Funcţia de producţie $u = x^3y^2 + xy + 2x + 3y$ reprezintă dependenţa producţiei bunului u de factorii de producţie x şi y. Calculaţi producţiile marginale în punctul (1, 1, 1).

6. Fie $z = (x + a)^\alpha (y + b)^\beta$, $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ constante o funcţie utilitate pentru mărfurile x şi y. Precizaţi utilităţile marginale pentru mărfurile x şi y, într-un ansamblu de cumpărături (x, y).

7. Arătaţi că dacă φ şi ψ sunt funcţii definite pe $\mathbb{R}$ şi admit derivate de ordinul întâi şi doi continue, atunci funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate în dreptul fiecăreia:

a) $z = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

b) $z = xy\varphi(x^2 - y^2)$, $xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + x^2y\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^2)z$;

c) $z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^2}\right)$, $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$, $n \in \mathbb{N}$;

d) $z = \varphi(y - ax) + \varphi(y + ax)$, a constantă, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

e) $z = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

f) $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(x, y)$, $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

8. Arătaţi că dacă $z = f(x, y)$ este o funcţie omogenă de grad m, atunci:

a) $z = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, φ funcţie de o variabilă;

b) $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ sunt funcţii omogene de gradul m- 1;

c) $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y^2} = m(m - 1)z$.

9. Pentru funcţia $f(x, y) = x^y$ scrieţi formula lui Lagrange în punctul (1, 1).

10. Scrieţi polinomul $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ după puterile lui $x - 1$ şi $y - 1$.

11. Scrieţi formula lui Taylor cu trei termeni, pentru funcţia $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$, în punctul (0, 0).

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 - xyz$. Calculaţi derivata funcţiei f în punctul A(1, 2, 0), după direcţia AB, dacă B(3, 1, 2).

13. Pentru funcţia $z = xye^{x+y}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculaţi derivata funcţiei f în punctul A(1, 1), după direcţia AB, dată de B(3, 3).

14. Calculatî y', y'', dacă y= y(x) este definită implicit de ecuaţia $x^2 + y^2 + xy = 3$.

15. Calculaţi y' pentru x= 0 şi y= 0, dacă y este definită implicit de ecuaţia

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 y - y^3.$$

16. Fie z= z(x, y) o funcţie definită implicit de ecuaţia

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$$

Calculaţi $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$.

17. Aflaţi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ în punctul (-1, 2) dacă z= z(x, y) este definită implicit de ecuaţia

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0.$$

18. Dacă z= z(x, y) este definită implicit prin ecuaţia $z^3 - 3xyz = 1$, atunci calculaţi $z'_x,\ z'_y,\ z''_{x^2},\ z''_{xy}$ şi z''_{y^2}.

19. Calculaţi diferenţiala de ordinul întâi şi doi pentru funcţiile:

a) $z = xe^y$;

b) $z = y^{\ln x}$;

c) $z = xe^y + ye^x$;

d) $u = xyz$;

e) $u = xy + xz + yz$;

f) $u = e^{2x+3y+4z}$;

g) $u = x_1 x_2 x_3 ... x_n$.

20. Aflaţi punctele de extrem local pentru următoarele funcţii:

a) $z = (x-1)^2 + 2y$;

b) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

c) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

d) $z = (x-1)^2 - 2y^2$;

e) $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$;

f) $z = x^3 y^3 (6 - x - y),\ x > 0,\ y > 0$;

g) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;

h) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y},\ x > 0,\ y > 0;$

i) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z;$

j) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0;$

k) $z = xy^2 e^{x-y},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 0;$

l) $z = x^3 + 3x^2 y + y^2 - 9x - 7y;$

m) $z = 2x^3 + x^2 y - xy^2 + y^3 - 5x + 2y;$

21. O intreprindere produce două produse. Costul producerii acestor două produse este dat de funcţia

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 200.$$

Aflaţi costul minim.

22. Să se determine punctele de extrem local condiţionate pentru funcţiile:

a) $z = x^2 + y^2$, cu condiţia x+ y= 2;

b) $z = x^{xy}$, cu condiţia x+ y= 4;

c) $z = x + y$, cu condiţia $x^\alpha y^\beta = a,\ \alpha,\ \beta,\ a$ constante reale pozitive;

d) $z = x + y$, cu legătura $x^2 + y^2 = 1;$

e) $u = x + y + z$, cu legăturile xyz= 8, xy= 12z;

f) $u = x - 2y + 2z$, cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 1;$

g) $u = x+y+z$, cu legăturile $x-y+z = 2$ şi $x^2-y^2+z^2 = 4;$

h) $u = xy + yz$, cu legăturile $x^2 + y^2 = 2,\ y + z = 2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

23. O fabrică produce bunuri de două tipuri. Să se maximizeze profitul, dacă acesta este dat prin funcţia:

$$f(x, y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y + 30$$

x şi y fiind cantitătîile din cele două produse supuse legăturii x+ y= 12.

24. Ajustaţi linar valorile din tabelul

luna x	1	2	3	4	5	6
vânzări y	9	10	8	11	10	7

,

unde y reprezintă vânzările realizate de o firmă în primele 6 luni ale anului. Care este valoarea estimată a se obţine în luna a 8-a a anului?

25. Ajustaţi datele din tabelul

x	1	1,5	2	2,5	3
y	150	200	130	160	180

26. Ajustaţi datele numerice din tabelul

x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	8	16

printr-o:

a) parabolă de gradul doi

b) exponenţială de forma $y = b \cdot a^x$

27. Scrieţi polinomul de interpolare Lagrange pentru tabelul de date numerice

x	0	1	2	3	4
y	3	2	1	4	5

28. Ajustaţi printr-o funcţie liniară datele din tabelul

x	1	3	4	8
y	3	7	7	18

Pentru datele din acelaşi tabel scrieţi polinomul de interpolare Lagrange.

29. Să se ajusteze datele numerice

x	1	2	4	5	8	11
y	3	7	10	4	9	5

printr-o funcţie de forma $y = \frac{ax}{x^2+1} + b$.

30. Pentru datele numerice

x	1	2	4	5
y	3	10	12	15

scrieţi polinomul lui Lagrange. Cu rezultatul găsit prognozaţi valorile lui y pentru x= 6 şi x= 10.

7.10 Test de verificare a cunoştinţelor nr. 7

1. Definiţi următoarele noţiuni:

   a) Derivata parţială a unei funcţii de mai multe variabile;

   b) Diferenţiala unei funcţii de mai multe variabile;

   c) Punct de extrem local pentru o funcţie de mai multe variabile;

   d) Integrarea funcţiilor.

2. a) Găsiţi extremele locale ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ , \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

   b) Găsiţi extremele locale ale funcţie:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ , \qquad f(x,y) = x^2 + y^{4.}$$

3. Găsiţi extremele locale ale funcţiei

$$f : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}\ , \quad \Delta = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \text{ cu}$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2 + 8xy - 4y^2 - 5.$$

4. Găsiţi extremele locale ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^3$.

5. O firmă produce două sortimente de bunuri, în cantităţile x şi y. Dacă funcţia profitului este dată prin $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18$, să se determine volumele celor două bunuri astfel încât profitul să fie maxim.

6. Găsiţi extremele locale ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = 6 - 4x - 3y$ condiţionate de ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$.

7. Găsiţi extremele locale ale funcţiei $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ condiţionate de ecuaţia $xyz = 1$, în domeniul $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

8. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-o elipsă
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

9. Găsiţi punctele de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z, t) = xy + xz - 3xt + y^2 + z^2 + t^2 + 10x + 6y$ condiţionate de ecuaţiile
$$\varphi_1(x, y, z, t) = x + 2y + 3z + 2t = 0 \quad \text{şi}$$
$$\varphi_2(x, y, z, t) = -x + y + z + t = 0.$$

10. Fie funcţia de producţie $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu $f(x, y) = x^{0,3} \cdot y^{0,5}$, unde x este capitalul iar y este forţa de muncă. Să se determine producţia maximă cu restricţia $6x + 2y = 384$.

Capitolul 8

Generalizări ale noţiunii de integrală

"Tot ce va servi la ceva, e bun"

(W. Shakespeare)

Până acum s-a considerat că $\int\limits_a^b f(x)dx$ reprezintă o integrală Riemann, dacă sunt îndeplinite condiţiile: $a \neq -\infty$ şi $b \neq \infty$; f funcţie mărginită pe $[a, b]$ şi f funcţie reală de o singură variabilă reală.

Dacă una din aceste condiţii nu este îndeplinită, atunci expresia $\int_a^b f(x)dx$ constituie o extindere a noţiunii de integrală.

În acest capitol vom preciza sensul acestei noţiuni pentru câteva dintre aceste extinderi.

8.1 Integrale improprii

În multe situaţii practice apar integrale care au intervalul de integrare de lungime infinită şi integrale pentru care funcţia de integrat nu este mărginită.

Astfel de integrale se numesc **improprii** sau **generalizate**. Dacă lungimea intervalului este infinită, adică avem una din situaţiile

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx \ , \quad I = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \ , \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_R f(x)dx,$$

atunci spunem că avem **integrale improprii de speţa înâi**. Dacă funcţia de integrat este nemărginită pe $[a, b]$, atunci spunem că avem **integrale improprii de speţa a doua**. Dacă atât intervalul de integrare este de lungime infinită, cât şi f este nemărginită în acest interval, atunci spunem că avem **integrale improprii mixte**.

Definiţia 8.1.1 *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă pe orice interval* $[a, b]$, $b \in \mathbb{R}$, $b > a$. *Dacă există* $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$, *atunci prin definiţie*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx;$$

când limita este finită spunem că integrala este **convergentă** *iar în caz contrar, adică dacă limita nu există sau este infinită, spunem că integrala improprie este* **divergentă**.

În mod analog definim

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} f(x)dx$$

şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Imediat se observă că avem relaţiile

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-b}^{\infty} f(-t)dt$$

şi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{C} f(x)dx + \int_{C}^{+\infty} f(x)dx \ , \qquad C \in \mathbb{R},$$

care ne arată că este suficient să studiem cazul intervalului $[a, \infty]$.

Exemplul 8.1.1. Să considerăm integrala

$$\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \ ; \qquad a > 0 \ \text{ şi } \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pentru $b > a$ şi $\lambda \neq 1$ avem

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}(b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}).$$

Limita

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\lambda}(b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda})$$

este finită, fiind egală cu $\dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}$, pentru $1-\lambda < 0$, adică $\lambda > 1$.

În cazul $\lambda = 1$ avem

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln a) = \infty,$$

integrala fiind divergentă.

În concluzie, avem că $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1}$ pentru $\lambda > 1$, adică este convergentă, iar pentru $\lambda \leq 1$ integrala improprie este divergentă.

Exemplul 8.1.2. Fie de calculat integrala improprie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\frac{b}{2} - \mathrm{arctg}\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Observaţia 8.1.1 *Putem scrie*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^k f(x)dx + \int_k^{k+1} f(x)dx + ... + \int_{k+n-1}^{k+n} f(x)dx + ...,$$

$k \in \mathbb{N}$, $k > a$.

Dacă notăm $u_n = \int_{k+n-1}^{k+n} f(x)dx$, $n = 1, 2, ...$, $u_0 = \int_a^k f(x)dx$, atunci

$$\int_k^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty u_n,$$

adică integralei $\int_a^\infty f(x)dx$ îi corespunde seria numerică $\sum_{n=0}^\infty u_n$. Integrala improprie şi seria asociată au aceeaşi natură.

Această observaţie ne permite să adaptăm criteriile de convergenţă de la seriile numerice la integralele improprii de speţa întâi.

Teorema 8.1.1 (Criteriul lui Cauchy) *Integrala improprie* $\int_a^\infty f(x)dx$, *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $M(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$ *aşa încât pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > \alpha > M(\varepsilon)$ *să avem*

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Demonstraţia rezultă imediat din Criteriul lui Cauchy scris pentru seria numerică $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Definiţia 8.1.2 *Integrala improprie* $\int_a^\infty f(x)dx$ *se numeşte* **absolut convergentă** *dacă integrala improprie* $\int_a^\infty |f(x)|dx$ *este convergentă.*

Teorema 8.1.2 *Dacă* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.*

Pentru demonstraţie se foloseşte Teorema 8.1.2 şi inegalitatea

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Şi criteriile de comparaţie de la serii cu termeni pozitivi se extind imediat la integrale improprii.

Teorema 8.1.3 (primul criteriu de comparaţie) *Fie* f, g *funcţii definite şi integrabile pentru* $x \ge a$. *Dacă* $0 \le f(x) \le g(x)$ *pentru* $x \ge a$, *atunci:*

1) dacă $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *este convergentă, atunci şi* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *este convergentă;*

2) dacă $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *este divergentă, atunci şi* $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *este divergentă.*

Teorema 8.1.4 (Al doilea criteriu de comparaţie) *Fie funcţiile* $f, g : [a, \infty) \to (0, \infty)$. *dacă* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $k \in (0, \infty)$, *atunci integralele improprii* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *şi* $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *su aceeaşi natură, adică ambele sunt convergente sau ambele sunt divergente. Dacă* $k = 0$, *atunci convergenţa integralei* $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ *implică convergenţa integralei* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Corolarul 8.1.1 *Fie* $f : [a,\infty) \to (0,\infty)$, $a > 0$. *Dacă există* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\lambda f(x) = k$, k *constantă reală finită, pentru* $\lambda > 1$, *atunci integrala* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ *este convergentă. Dacă* $\lambda \leq 1$ *şi* $k > 0$, *atunci integrala este divergentă.*

Valabilitatea Corolarului rezultă din Teorema 8.1.3 şi Exemplul **??**.

Exemplul 8.1.3. Integralele improprii $\int\limits_a^\infty x^\alpha e^{-x}dx$, $a > 0$, sunt convergente pentru orice α real.

Într-adevăr, pentru $x > 0$ putem scrie

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... > \frac{x^n}{n!}\ , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

De aici, avem $0 < e^{-x} < \dfrac{n!}{x^n}$, adică $0 < x^\alpha e^{-x} < \dfrac{n!}{x^{n-\alpha}}$. Alegând $n \in \mathbb{N}$ aşa încât $n-\alpha = \lambda > 1$ şi aplicând primul criteriu de comparaţie pentru $f(x) = x^\alpha e^{-x}$, $g(x) = \dfrac{n!}{x^\lambda}$, $\lambda > 1$, pe baza Exemplului **??**, obţinem afirmaţia din enunţul exemplului.

Exemplul 8.1.4. Integralele improprii $\int\limits_a^\infty \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$, P_m şi Q_n fiind funcţii polinomiale cu coeficienţi reali, cu gradele m şi respectiv n, $Q_n \neq 0$ pentru $x \geq a$, sunt convergente pentru $n - m \geq 2$.

Avem

$$\lim_{x\to\infty} x^\lambda \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x\to\infty} x^\lambda \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{\lambda+m-n} \cdot \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + ... + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + ... + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n}$$

dacă $\lambda = n - m$. Conform Corolarului 8.1.1, integrala dată este convergentă dacă $n - m \geq 2$.

În mod analog se studiază şi integralele improprii de speţa a doua.

Definiţia 8.1.3 *Fie funcţia* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, *nemărginită în* b, *dar mărginită şi integrabilă pe orice subinterval închis* $[a, \beta] \subset [a, b)$. *dacă există* $\lim\limits_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}} \int\limits_a^\beta f(x)dx$, *atunci prin definiţie*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}} \int\limits_a^\beta f(x)dx.$$

Dacă limita este finită, atunci spunem că integrala improprie este **convergentă** iar în caz contrar spunem că integrala este **divergentă**.

Dacă f este nemărginită în a atunci

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\alpha\to a\\ \alpha>a}} \int\limits_\alpha^b f(x)dx,$$

iar dacă f este nemărginită într-un punct c, $a < c < b$, atunci

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Pe baza acestor considerente, ne putem limita numai la cazul $\int\limits_a^b f(x)dx$, cu $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} |f(x)| = \infty$.

Exemplul 8.1.5. Integrala $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ este convergentă pentru $\lambda < 1$ şi divergentă pentru $\lambda \geq 1$.

Avem

$$\int\limits_a^\beta \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \frac{1}{\lambda-1}\frac{1}{(b-x)^{\lambda-1}}\Bigg|_a^\beta =$$

$$= \frac{1}{\lambda-1}\left[\frac{1}{(b-\beta)^{\lambda-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}\right],$$

cu

$$\lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}} \frac{1}{\lambda-1}\left[\frac{1}{(b-\beta)^{\lambda-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}\right] = \frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}$$

pentru $\lambda < 1$ şi $+\infty$ pentru $\lambda > 1$. Deci $\lambda = 1$ valoarea integralei este $-\ln|b-x|\,|_a^\beta \to \infty$ când $\beta \to b$, $\beta < b$, deci este divergentă.

Dacă $b - a > 1$, atunci putem scrie

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{b-1} f(x)dx + \int\limits_{b-1}^{b-\frac{1}{2}} f(x)dx + \int\limits_{b-\frac{1}{2}}^{b-\frac{1}{3}} f(x)dx + ...+$$

$$+ \int\limits_{b-\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n+1}} f(x)dx + ...,$$

iar dacă punem $u_0 = \int\limits_a^{b-1} f(x)dx$ şi $u_n = \int\limits_{b-\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n+1}} f(x)dx$, $n =$

$1, 2, ...$, atunci obţinem

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

care exprimă integrala improprie de speţa a doua printr-o serie numerică.

Ca şi la integralele improprii de speţa întâi, putem transforma criteriile de convergenţă de la seriile de numere reale în criterii de convergenţă pentru integrale improprii de speţa a doua.

Teorema 8.1.5 (Criteriul lui Cauchy). *Integrala improprie* $\int_a^b f(x)dx$, *cu* $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} |f(x)| = \infty$, *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr* $M(\varepsilon) > 0$ *aşa încât pentru orice* α *şi* β *cu* $b - M(\varepsilon) < \alpha < \beta < b$ *să avem* $\left| \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Definiţia 8.1.2 şi Teoremele 8.1.2 şi 8.1.3 se păstrează fără modificări şi pentru integralele improprii de speţa a doua.

Teorema 8.1.6 (Al doilea criteriu de comparaţie). *Fie funcţiile* $f, g : [a, b) \to (0, \infty)$. *Dacă* $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $k \in (0, \infty)$, *atunci integralele improprii* $\int_a^b f(x)dx$ *şi* $\int_a^b g(x)dx$ *au aceeaşi natură. Dacă* $k = 0$, *atunci convergenţa integralei improprii* $\int_a^b g(x)dx$ *implică convergenţa integralei improprii*

$\int\limits_a^b f(x)dx.$

Corolarul 8.1.2 *Fie* $f : [a,b) \to (0,\infty)$ *cu* $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = \infty$. *Dacă* $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} (b-x)^\lambda f(x)dx = k$, k *constantă reală finită, pentru* $\lambda < 1$, *atunci integrala improprie* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *este convergentă. Dacă* $\lambda \geq 1$ *şi* $k \neq 0$, *atunci integrala este divergentă.*

Exemplul 8.1.6. Să studiem convergenţa integralei $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[6]{1-x^6}}$.

Funcţia $f : [0,1) \to (0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[6]{1-x^6}}$ divine infinită când $x \to 1$, $x < 1$, deci avem o integrală improprie de speţa a doua. Cum

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{1-x} \cdot \sqrt{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}} \leq \frac{1}{\sqrt[6]{1-x}},$$

$x \in [0,1)$ şi $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[6]{1-x}}dx = \int \frac{1}{(1-x)^{1/6}}dx$ este convergent (v. Exemplul **??**, $\lambda = 1/6 < 1$), deducem că integrala dată este convergetă.

Exemplul 8.1.7. Să studiem natura integralei

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Se observă că funcţia $f : (a,b) \to (0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ devine $+\infty$ atât în a cât şi în b.

Pentru studierea naturii integralei utilizăm Corolarul 8.1.2. Avem

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}}(b-x)^{\lambda}f(x)=\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}}(b-x)^{\lambda-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-a}}=\frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

pentru $\lambda=\dfrac{1}{2}<1$ şi

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}(x-a)^{\lambda}f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}(x-a)^{\lambda-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b-x}}=\frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

pentru $\lambda=\dfrac{1}{2}<1$, deci integrala dată este convergentă.

Observaţia 8.1.2 *Din consideraţiile anterioare, deducem că proprietăţile principale ale integralei Riemann se păstrează şi în cazul integralelor improprii convergente. Astfel, de exemplu, pentru o integrală improprie de speţa întâi are loc formula lui Leibniz - Newton.*

Teorema 8.1.7 *Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, integrabilă şi fie F o primitivă a funcţiei f pe intervalul $[a,\infty)$. Atunci integrala improprie $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ şi în plus este valabilă formula Leibniz - Newton*

$$\int\limits_a^{\infty}f(x)dx=F(\infty)-F(a)\ ,\quad F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x).$$

Demonstraţie. Pentru orice $b>a$ avem $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ şi prin trecere la limită se obţin afirmaţiile din enunţ.

În mod analog se extind schimbarea de variabilă şi integrarea prin părţi.

Exemplul 8.1.8. Să calculăm

$$\int_0^{\infty}(x-1)e^{-x}dx.$$

Avem

$$\int_0^{\infty}(x-1)e^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^{\infty} = 0.$$

Observaţia 8.1.3 *În cazul unor integrale improprii divergente se ataşează o valoare printr-un procedeu datorat lui Cauchy.*

Acesta este aplicabil integralelor improprii de speţa întâi de forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

şi integralelor improprii de speţa a doua

$$\int_a^b f(x)dx$$

în care f devine infinită într-un punct c, $a < c < b$.

Definiţia 8.1.4 *Integrala improprie* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *se numeşte* **convergentă în sensul valorii principale Cauchy**, *dacă limita*

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx = v \cdot p \cdot C\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

există şi este finită.

Exemplul 8.1.9. Pentru integrala improprie divergentă $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$ avem

$$v \cdot p \cdot C \int_{-1}^{2} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x} \right] = \ln 2.$$

8.2 Integrale cu parametri

Să trecem la extinderea noţiunii de integrală în cazul funcţiilor de mai multe variabile. Dacă funcţia de integrat este de mai multe variabile şi ea este integrată Riemann în raport cu una din variabile, atunci spunem că avem o **integrală cu paramentri**. Acestea au forma generală

$$I(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = \int_a^b f(x, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) dx,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sunt parametrii reali cu valori din anumite mulţimi de numere. Se observă imediat că o integrală de acest fel definişte o funcţie de p variabile $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$.

În legătură cu astfel de funcţii se pune problema studierii proprietăţilor de bază (trecerea la limită, continuitatea, derivabilitatea şi integrabilitatea) fără a calcula efectiv integrala care defineşte funcţia.

În continuare, ne vom limita numai la cazul $p = 1$, adică la funcţiile de forma:

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx \ , \qquad \lambda \in Y \subseteq \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Teorema 8.2.1 (Teorema trecerii la limită) *Fie* $f : [a,b] \times Y \to \mathbb{R}$ *o funcţie de două variabile, integrabilă în raport cu* x *pe* $[a,b]$ *şi* λ_0 *un punct de acumulare pentru* Y*. Dacă există* $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} f(x,\lambda)$*, atunci*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} I(\lambda) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int\limits_a^b f(x,\lambda)dx = \int\limits_a^b \left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} f(x,\lambda) \right) dx.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi notăm $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} f(x,\lambda) = g(\lambda)$; atunci există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru $|\lambda - \lambda_0| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x,\lambda) - g(\lambda)| < \varepsilon/(b-a)$. Atunci putem scrie:

$$\left| \int\limits_a^b f(x,\lambda)dx - \int\limits_a^b g(\lambda)dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_a^b (f(x,\lambda) - g(\lambda)dx) \right| \leq \int\limits_a^b |f(x,\lambda) - g(\lambda)|_a^b dx < \varepsilon,$$

ceea ce demonstrează Teorema 8.2.1.

Observaţia 8.2.1 *Teorema 8.2.1 ne arată că într-o integrală cu parametru putem interventi operaţia de integrare cu operaţia de trecere la limită.*

Pentru a putea aprofunda studiul proprietăţilor funcţiei $I(\lambda)$ vom considera $Y = [c,d]$.

Teorema 8.2.2 *Dacă funcţia* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *este continuă în raport cu ansamblul variabilelor pe dreptunghiul* $[a,b] \times [c,d]$*, atunci funcţia* I *definită de (8.1) este continuă pe intervalul* $[c,d]$*.*

Demonstraţie Fie λ_0 un punct din intervalul $[c, d]$. Formăm diferenţa

$$I(\lambda) - I(\lambda_0) = \int_a^b [f(x, \lambda) - f(c, \lambda_0)]dx.$$

Funcţia de două variabile f, fiind continuă în dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$, este şi uniform continuă în acest domeniu. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta(\varepsilon) > 0$, aşa încât să avem

$$|f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

dacă $|\lambda - \lambda_0| < \delta(\varepsilon)$.

Acum, putem scrie

$$|I(\lambda) - I(\lambda_0)| \leq \int_a^b |f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0)|dx < \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon,$$

dacă $|\lambda - \lambda_0| < \delta(\varepsilon)$.

Deci, avem $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} I(\lambda) = I(\lambda_0)$, ceea ce ne arată că funcţia I este continuă în λ_0. Cum λ_0 a fost ales arbitrar din intervalul $[c, d]$, rezultă că funcţia I este continuă pe $[c, d]$.

Teorema 8.2.3 (De derivare sub semnul integrală) *Dacă $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ este continuă în dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$ şi există derivata parţială f'_λ continuă în raport cu ansamblul variabilelor în acelaşi dreptunghi, atunci funcţia $I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda)dx$ este derivabilă pe $[c, d]$ şi are loc formula*

$$I'(\lambda) = \int_a^b f'_\lambda(x, \lambda)dx.$$

Demonstraţie Fie λ_0 un punct fixat din $[c,d]$. Din egalitatea

$$\frac{I(\lambda)-I(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}=\int_a^b \frac{f(x,\lambda)-f(x,\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}dx,$$

prin trecere la limită sub integrală, avem

$$\lim_{x\to x_0}\frac{I(\lambda)-I(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}=\int_a^b f'_\lambda(x,\lambda_0)dx,$$

care ne arată că funcţia I este derivabilă în λ_0 şi are loc formula din enunţul teoremei.

Exemplul 8.2.1. Să calculăm derivata funcţiei I definită prin

$$I(\lambda)=\int_0^1 \frac{\sin\lambda x}{x}dx\ , \qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Integrala nu este improprie deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\lambda x}{x}=\lambda$.

Avem

$$I'(\lambda)=\int_0^1 x\cdot\frac{\cos\lambda x}{x}dx=\int_0^1\cos\lambda x dx=$$

$$=\left.\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right|_0^1=\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

Observaţia 8.2.2 *În unele situaţii se consideră integrale cu parametru în care şi limitele de integrare depind de parametru, adică avem*

$$I(\lambda)=\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)dx\ , \qquad \lambda\in[c,d].$$

Dacă, pe lângă condiţiile din Teorema 8.2.3, mai adaugăm faptul că funcţiile a şi b sunt derivabile în raport cu λ pe $[c,d]$, atunci are loc formula

$$I'(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f'_\lambda(x,\lambda)dx + b'(\lambda)f(b(\lambda),\lambda) - a'(\lambda)f(a(\lambda),\lambda).$$

Teorema 8.2.4 (de integrare) *Dacă funcţia* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *este continuă în raport cu ansamblul variabilelor în dreptunghiul* $[a,b] \times [c,d]$*, atunci oricare ar fi intervalul* $[\alpha,\beta] \subseteq [c,d]$ *are loc egalitatea*

$$\int_\alpha^\beta I(\lambda)d\lambda = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,\lambda)dx\right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,\lambda)dx\right) dx.$$

Cu alte cuvinte, în condiţiile teoremei se poate integra sub semnul integralei, sau se poate schimba ordinea de integrare.

Demonstraţie Fie $z \in [c,d]$; vom demonstra egalitatea mai generală

$$\int_\alpha^z \left(\int_a^b f(x,\lambda)dx\right) d\lambda = \int_a^b \left(\int_\alpha^z f(x,\lambda)d\lambda\right) dx.$$

Facem notaţiile

$$\varphi(z) = \int_\alpha^z \left(\int_a^b f(x,\lambda)dx\right) d\lambda$$

şi

$$\psi(z) = \int_a^b \left(\int_\alpha^z f(x,\lambda)d\lambda\right) dx.$$

Avem
$$\varphi'(z) = \int\limits_a^b f(x,\lambda)dx,$$
şi
$$\psi'(z) = \int\limits_a^b f(x,\lambda)dx,$$
oricare ar fi $z \in [c,d]$. De aici, rezultă că $\varphi(z) - \psi(z) = C$ - constantă. Cum $\varphi(\alpha) - \psi(\alpha) = 0$, obţinem $C = 0$, ceea ce ne arată că $\varphi(z) = \psi(z)$, oricare ar fi $z \in [c,d]$. Teorema este demonstrată.

Exemplul 8.2.2. Să considerăm integrala cu parametru
$$I(\lambda) = \int\limits_0^1 x^\lambda dx.$$

Integrăm funcţia I pe intervalul $[a,b]$, $0 < a < b$, şi avem
$$\int\limits_a^b I(\lambda)d\lambda = \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^1 x^\lambda dx\right) d\lambda = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_a^b x^\lambda d\lambda\right) dx$$
de unde
$$\int\limits_a^b \left.\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right|_0^1 d\lambda = \int\limits_0^1 \left.\frac{x^\lambda}{\ln x}\right|_a^b dx$$
sau
$$\int\limits_a^b \frac{d\lambda}{\lambda+1} = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx,$$
ceea ce conduce la
$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln(\lambda+1)|_a^b = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Se observă că, utilizând proprietatea de intervertire a ordinii de integrare într-o integrală cu parametru, am reuşit să calculăm o integrală greu de calculat pe altă cale.

De fapt, aceasta este una dintre aplicaţiile importante ale integralelor cu parametrii: calculul unor integrale greu de evaluat pe altă cale.

Deseori, integrale fără parametru sunt transformate în integrale cu parametru la care, apoi, se aplică derivarea sau integrarea sub semnul integralei şi se obţine o valoare mai generală pentru integrala dată. Prin particularizarea parametrului se obţine valoarea integralei date.

Exemplul 8.2.3. Să calculăm integrala

$$I = \int_0^1 \frac{\text{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Se observă că integrala nu este improprie deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}} = 1$. Considerăm integrala mai generală

$$I(\lambda) = \int_0^1 \frac{\text{arctg}\lambda x}{x\sqrt{1-x^2}}dx \ , \qquad \lambda \in [0, \infty).$$

Derivăm în raport cu parametrul λ şi avem

$$I'^{(\lambda)} = \int_0^1 \frac{x}{1+\lambda^2x^2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+\lambda^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Făcând schimbarea de variabilă $x = \cos t$, găsim

$$I'(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\lambda^2\cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\text{arctg}\frac{\text{tg}t}{\sqrt{1+\lambda^2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

De aici, integrând în raport cu λ, găsim

$$I(\lambda) = \frac{\pi}{2} \ln(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}) + C.$$

Cum $I(0) = 0$, rezultă $C = 0$ şi

$$I(\lambda) = \frac{\pi}{2} \ln(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}).$$

Pentru $\lambda = 1$ avem

$$I(1) = I = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Observaţia 8.2.3 *În cazul când integrala ce depinde de un parametru este improprie, cele expuse în acest paragraf rămân valabile cu condiţia ca integralele improprii cu care se lucrează să fie convergente.*

Exemplul 8.2.4. Să considerăm integrala

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \ , \qquad \alpha \in (0, \infty).$$

Scriem

$$I(\lambda) = \int_0^1 e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Cum $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} = 1$, rezultă că prima integrală este convergentă.

Deoarece, pentru $x \geq 1$ avem

$$\left| e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-\alpha x}$$

şi

$$\int_1^\infty e^{-\alpha x}dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\bigg|_1^\infty = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha},$$

deducem că $\int_1^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ este convergentă. Prin urmare, $I(\alpha)$ este bine definită.

Aplicând teorema de derivare a integralelor cu parametru, avem:

$$I'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}(-x)\frac{\sin x}{x}dx = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x dx,$$

care este o integrală improprie convergentă. Integrând prin părţi, obţinem

$$I'(\alpha) = -1 - \alpha^2 I'(\alpha),$$

de unde

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2},$$

din care rezultă

$$I(\alpha) = -\text{arctg}\alpha + C.$$

Pentru determinarea constantei C calculăm

$$\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = -\frac{\pi}{2} + C,$$

pe de o parte, şi din

$$|I(\alpha)| \le \int_0^\infty \left|e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right| dx \le \int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}$$

$\lim\limits_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = 0.$

Avem deci $C - \frac{\pi}{2} = 0$, de unde $C = \frac{\pi}{2}$. Rezultă că $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\alpha$. din acest rezultat, prin trecere la limită când $\alpha \to 0$, $\alpha > 0$, găsim

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

8.3 Integrale euleriene. Funcţia Gamma. Funcţia Beta

În orice activitate există anumite rezultate care trebuiesc studiate mai aprofundat şi chiar reţinute. Această situaţie se întâlneşte şi în clasa integralelor cu parametri şi improprii. Există anumite funcţii, numite uneori şi **funcţii speciale**, definite prin integrale cu parametrii la care apelăm deseori în calculele matematice.

Două dintre aceste funcţii speciale sunt funcţiile Gamma şi Beta, numite sub un generic comun **integrale euleriene**.

Definiţia 8.3.1 *Funcţia* $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

se numeşte **funcţia Gamma** *sau funcţia lui Euler de speţa a doua, iar funcţia* $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1} dx$$

se numeşte **funcţia Beta** *sau funcţia lui* **Euler de speţa întâi**.

Teorema 8.3.1 *Funcţiile* Γ *şi* B *sunt bine definite, adică integralele improprii care le definesc sunt convergente.*

Demonstraţie Să arătăm că funcţia Γ este bine definită. Scriem Γ ca sumă de două integrale, anume:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx.$$

Prima integrală $I_1 = \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx$ pentru $p \geq 1$ nu este improprie. pentru $p \in (0,1)$ avem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\lambda e^{-x}x^{p-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\lambda+p-1}e^{-x} = 1$$

dacă $\lambda = 1 - p < 1$, de unde, conform cu Corolarul 8.1.2, deducem că integrala I_1 este convergentă.

Convergenţa integralei $I_2 = \int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$ rezultă din Exemplul **??**.

Din I_1 şi I_2 convergente şi faptul că $\Gamma(p) = I_1 + I_2$, rezultă că integrala improprie ce defineşte funcţia Gamma este convergentă.

Utilizând acelaşi Corolar 8.1.2 se arată imediat că şi funcţia B este bine definită.

În continuare, vom prezenta câteva din proprietăţile mai uzuale ale funcţiilor Γ şi B.

Teorema 8.3.2 *Pentru funcţia* Γ *sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

1) $\Gamma(1) = 1$*;*

2) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$*;*

3) $\Gamma(n+1) = n!\quad,\quad n \in \mathbb{N}$*;*

4) $\Gamma(p) = 2\int\limits_0^\infty e^{-t^2} \cdot t^{2p-1} dt$*;*

5) $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$, $p \in (0,1)$ *(numită formula complementelor).*

6) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Demonstraţie

1) $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}|_0^\infty = 1$

2) Aplicăm integrarea prin părţi succesiv şi avem

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^p dx = -(e^{-x}x^p)|_0^\infty +$$

$$+p\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = p\Gamma(p).$$

3) Se aplică în mod repetat formula se recurenţă de la 2):

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = ... =$$

$$= n(n-1)...2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!.$$

4) Efectuăm schimbarea de variabilă $x = t^2$ şi avem

$$\Gamma(p) = 2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}(t^2)^{p-1}tdt = 2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}t^{2p-1}dt,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

5) Demonstraţia formulei complementelor este mai complicată şi de aceea renunţăm la prezentarea ei.

6) Dacă luăm în formula complementelor $p = \dfrac{1}{2}$, atunci avem
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi,$$
de unde $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Teorema 8.3.3 *Pentru funcţia B sunt adevărate următoarele relaţii:*

1) $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$*;*

2) $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$*;*

3) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ *(formula de legătură dintre funcţiile B şi Γ sau formula lui Dirichlet);*

4) $B(p,q) = B(q,p)$ *(proprietatea de simetrie);*

5) $B(p,q) = \dfrac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q)$*;* $p>1$, $q>0$*;*

$B(p,q) = \dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$, $p>0$, $q>1$.

Demonstraţie

1) Facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{y}{y+1}$ şi avem
$$B(p,q) = \int_0^\infty \left(\frac{y}{y+1}\right)^{p-1}\left(1-\frac{y}{y+1}\right)^{q-1}\frac{dy}{(y+1)^2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy.$$

2) Utilizând formula de la 1), putem scrie

$$B(p,q) = \int_0^1 \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy + \int_1^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy.$$

În integrala a doua facem schimbarea de variabilă $y = 1/t$ şi obţinem formula de la 2).

3) În $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$ facem schimbarea de variabilă $x = ty$, t parametru real pozitiv şi obţinem

$$\Gamma(p) = t^p \int_0^\infty e^{-ty} y^{p-1} dy. \tag{8.2}$$

În acest rezultat înlocuim pe t prin $1+t$ şi p prin $p+q$ şi obţinem

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^\infty e^{-(1+t)y} y^{p+q-1} dy$$

Multiplicăm ambii membri ai formulei precedente cu t^{p-1} şi egalitatea obţinută o integrăm în raport cu t de la 0 la ∞ şi avem:

$$\Gamma(p+q) \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt =$$

$$\int_0^\infty \left(t^{p-1} \int_0^\infty e^{-(1+t)y} y^{p+q-1} dy \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} \left(y^p \int_0^\infty e^{-yt} t^{p-1} dt \right) dy.$$

Acum, conform cu 1) şi cu (8.2), în care schimbăm pe t cu y, obţinem:

$$\Gamma(p+q) \cdot B(p,q) = \int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} \Gamma(p) dy =$$

$$= \Gamma(p) \int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} dy = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q),$$

de unde găsim

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

4) Rezultă imediat din 3).

5) Aceste formule rezultă din formula de legătură de la 3) şi utilizând formula de recurenţă pentru Γ.

Observaţia 8.3.1 *Integralele euleriene sunt utile în studiul multor funcţii neelementare. De aceea, valorile lor au fost tabelate.*

Calculul multor integrale se reduce prin diferite transformări, la evaluarea funcţiilor B şi Γ.

Exemplul 8.3.1. Să arătăm că

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} Q \quad (\textbf{integrala lui Poisson}).$$

Facem schimbarea de variabilă $x^2 = t$ şi avem

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

În integrala din membrul doi se recunoaşte expresia funcţiei Γ pentru $p - 1 = -\frac{1}{2}$, adică $p = \frac{1}{2}$. Atunci, putem scrie

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exemplul 8.3.2. Să calculăm

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

Putem scrie

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2} dx,$$

care comparată cu exprimarea lui B dată de 1) din Teorema 8.3.3, conduce la $p - 1 = \frac{1}{4}$ şi $p + q = 2$, de unde $p = \frac{5}{4}$ şi $q = \frac{3}{4}$.

Rezultă că

$$I = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right),$$

de unde, utilizând formula de legătură dintre B şi Γ, obţinem

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

Acum, utilizând formula complementelor avem

$$I = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

În general, integralele de forma

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^m}{(1+x^n)^p}dx\ , \quad np > m+1$$

se calculează prin funcţiile B şi Γ, făcând schimbarea de variabilă $x^n = t$.

Exemplul 8.3.3. Să se reducă la funcţiile B şi Γ calculul integralelor de forma

$$I_{m,n} = \int\limits_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx,$$

m şi n numere reale aşa alese încât integrala să fie convergentă.

Facem schimbarea de variabilă

$$x = (1-t)a + bt\ , \quad t \in [0,1]$$

şi avem

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= (b-a)^{m+n+1}\int\limits_0^1 t^m(1-t)^n dt = \\ &= (b-a)^{m+n+1}B(m+1,n+1) = \\ &= (b-a)^{m+n+1}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}. \end{aligned}$$

Exemplul 8.3.4. Să calculăm $I = \int\limits_0^1 \ln^p \left(\frac{1}{x}\right) dx, \;\; p \in \mathbb{R}$, $p > -1$

Facem schimbarea de variabilă $x = e^{-t}$ şi avem

$$I = \int\limits_0^\infty t^p e^{-t} dt = \Gamma(p+1).$$

8.4 Integrale duble

La integralele cu parametrii funcţia de integrat era de mai multe variabile, însă calculul integralei se aplică numai la una din variabile, celelalte le considerăm parametrii. Ne propunem să extindem noţiunea de integrală pentru funcţiile de mai multe variabile aşa încât în evaluarea lor să utilizăm toate variabilele. Astfel de integrale le vom numi **multiple**. Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $z = f(x_1, ..., x_n)$, atunci o integrală m-multiplă o notăm prin

$$\int \cdots \int_D f(x_1, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

Dacă $n = 2$, atunci spunem că avem o **integrală dublă**, iar dacă $n = 3$, atunci spunem că avem o integrală triplă.

Pentru comoditatea tratării considerăm numai cazul integralelor duble.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ o funcţie de două variabile. Mai presupunem că D este un domeniu mărginit.

Să considerăm o partiţie (descompunere) arbitrară a domeniului D în n subdomenii $D_1, D_2, ..., D_n$ cu $D_i \neq \varnothing$, $i = \overline{1,n}$ şi $D_i \cap D_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$. O astfel de partiţie a lui D se numeşte diviziune a lui D şi o notăm prin (Δ_n). Notăm cu a_i aria sub domeniului D_i, $i = \overline{1,n}$ şi cu d_i **diametrul** lui D_i (cea mai mare dintre distanţele dintre două puncte din D_i), $i = \overline{1,n}$. Numărul $\|\Delta_n\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$ se numeşte **norma diviziunii (partiţia)** Δ_n.

În fiecare subdomeniu D_i al diviziunii (Δ_n) alegem un punct arbitrar de coordonate (ξ_i, η_i), $i = \overline{1,n}$, numite **puncte intermediare**.

Cu aceste precizări, introducem **suma integrală**

$$\sigma(\Delta_n, \xi, \eta, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) a_i.$$

Evident că suma $\sigma(\Delta_n, \xi, \eta, t)$ depinde de diviziunea Δ_n, de punctele intermediare (ξ_i, η_i) şi de funcţia f.

Definiţia 8.4.1 *Spunem că funcţia f* **este integrabilă pe domeniul** *D dacă oricare ar fi şirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ cu şirul normelor $(\|\Delta_n\|)_{n\geq 2}$ tinde la zero şi oricare ar fi punctele intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, $i = 1, 2, ..., n$ şirul sumelor integrale $(\sigma(D_n, \xi, \eta, f))_{n\geq 1}$ are o limită finită.*

Notăm această limită prin

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad \text{sau} \quad \iint\limits_D f(x,y)da.$$

şi o numim **integrala dublă a funcţiei** f **pe domeniul** D.

Aşadar, putem scrie

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta_n\|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) a_k.$$

Ca şi la funcţiile de o variabilă reală se arată că orice funcţie continuă pe domeniul D este integrabilă.

Şi proprietăţile integralei duble sunt analoage cu cele ale integralei Riemann.

Teorema 8.4.1 (de liniaritate) *Dacă $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii integrabile pe D, atunci oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe D şi avem*

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy =$$

$$= \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

Această proprietate ne spune că integrala dublă pe domeniul D este o funcţională liniară.

Demonstraţia teoremei este imediată.

Teorema 8.4.2 (de aditivitate faţă de domeniu) *Dacă funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe D, iar $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, atunci f este integrabilă pe D_1 şi pe D_2 şi avem*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Afirmaţia din această teoremă se demonstrează cu ajutorul definiţiei.

Teorema 8.4.3 (de interpretare geometrică) *Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$ este integrabilă, atunci avem*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V(f),$$

unde $V(f)$ este volumul barei cilindrice mărginită de domeniul D şi suprafaţă dată de $z = f(x,y)$, având generatoarele paralele cu axa Oz.

Pentru cazul particular $f \equiv 1$, avem

$$\iint\limits_D dy = \text{aria}(D).$$

Teorema 8.4.4 (de semn) *Dacă* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$, *atunci*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

Proprietatea din enunţ rezultă imediat din nenegativitatea sumelor integrale.

Teorema 8.4.5 (de monotonie) *Dacă* $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sunt integrabile pe* D *şi* $f \leq g$ *pe* D, *atunci*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

Pentru demonstraţie se aplică funcţiei $g - f \geq 0$ proprietatea de semn.

Teorema 8.4.6 (modulului) *Dacă funcţia* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este integrabilă pe* D *şi atunci* $|f|$ *este integrabilă pe* D *şi avem*

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

Formula din teoremă rezultă imediat din inegalitatea $-|f| \leq f \leq |f|$.

Teorema 8.4.7 (de medie) *Dacă* $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sunt integrabile pe* D, $m = \inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $M = \sup\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ *şi* g

are semn constant pe D, atunci există un număr real $\mu \in [m, M]$ aşa încât

$$\iint\limits_D f(x,y)d(x,y)dxdy = \mu \iint\limits_D g(x,y)dxdy,$$

numită **formula de medie generalizată pentru integrala dublă**.

Demonstraţie Considerăm $g \geq 0$ pe D. Atunci din $m \leq f(x,y) \leq M$ rezultă $mg(x,y) \leq f(x,y)g(x,y) \leq Mg(x,y)$. Utilizând proprietatea de monotonie a integralei duble, putem scrie:

$$\begin{aligned} m \iint\limits_D g(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy \leq \\ \leq M \iint\limits_D g(x,y)dxdy = 0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Dacă $\iint\limits_D g(x,y)dxdy = 0,$ atunci $\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy = 0$ şi putem alege orice $\mu \in [m, M]$ ca să avem formula din Teorema de medie.

Dacă $\iint\limits_D g(x,y)dxdy \neq 0$, atunci prin împărţire cu acest număr în (8.3) avem

$$m \leq \frac{\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy}{\displaystyle\iint\limits_D g(x,y)dxdy} \leq M,$$

de unde rezultă că putem lua

$$\mu = \frac{\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy}{\displaystyle\iint\limits_D g(x,y)dxdy}.$$

Cazuri particulare

8.4.1 Dacă f este continuă pe D, atunci există un punct $(\xi,\eta) \in D$ aşa încât $\mu = f(\xi,\eta)$.

8.4.2 Dacă $g \equiv 1$ pe D, atunci formula de medie ia forma

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \mu \ \text{ aria}(D),$$

numită **formula de medie pentru integrala dublă**.

Calculul integralelor duble se reduce la calculul a două integrale definite (Riemann), succesive. pentru început să considerăm cazul unui domeniu dreptunghiular.

Teorema 8.4.8 *Dacă $f:[a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe dreptunghiul $D=[a,b]\times[c,d]$ şi dacă pentru orice x constant din intervalul $[a,b]$, funcţia f este integrabilă în raport cu y, adică există*

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy \ , \quad x \in [a,b],$$

atunci avem

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Demonstraţie Vom considera diviziunile D_x şi D_y, respectiv pentru intervalele $[a,b]$ şi $[c,d]$, definite prin

$$D_x : a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$$
$$D_y : c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$$

şi având normele

$$\|D_x\| = \max_{i=\overline{i,m}}(x_i - x_{i-1})$$

respectiv

$$\|D_y\| = \max_{j=\overline{1,n}}(y_j - y_{j-1}).$$

Cele două diviziuni D_x şi D_y determină pe D diviziunea D dată de subdreptunghiurile

$$D_{i,j} = \left\{(x,y) \in D|\ x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\right\},$$

$i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ şi având norma $\|D\|$ dată de $\max\limits_{\substack{i=1,m \\ j=\overline{a,n}}} d_{i,j}$, de unde d_{ij} este diametrul dreptunghiului D_{ij}.

Se observă imediat că dacă $\|D_x\| \to 0$ şi $\|D_y\| \to 0$, atunci $\|D\| \to 0$ şi reciproc.

Alegem punctele intermediare $(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Deoarece f este integrabilă pe D, iar funcţia F există şi este integrabilă pe $[a,b]$, avem succesiv

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\|D\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j)\text{aria}D_{ij} =$$

$$= \lim_{\substack{\|D_x\|\to 0\\ \|D_y\|\to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) =$$

$$= \lim_{\|D_x\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}(x_i-x_{i-1})\left(\lim_{\|D_y\|\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)(y_j-y_{j-1})\right) =$$

$$= \lim_{\|D_x\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}(x_i-x_{i-1})\int\limits_c^d f(\xi_i,y)dy =$$

$$= \lim_{\|D_x\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \int_a^b F(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Deseori, integrala pe dreptunghiul $D = [a,b] \times [c,d]$ se notează prin

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)dxdy.$$

Aşadar, formula din enunţul Teoremei ia forma

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

În mod analog, se arată că avem şi formula

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y) = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Exemplul 8.4.1. Să calculăm

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}.$$

Avem

$$I = \int_0^1 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y+1)^2} = \int_0^1 dx \left(-\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2}\right) dx =$$

$$= -\ln(x+3)|_0^1 + \ln(x+2)|_0^1 =$$

$$= -\ln 4 + \ln 3 + \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{9}{8}.$$

Să trecem acum la calculul integralelor duble pe un domeniu D **regulat în raport cu una din axele de coordonate** .

Definiţia 8.4.2 *Spunem că un domeniu D este regulat în raport cu una din axele de coordonate dacă orice paralelă la una din axele de coordonate întâlneşte curba care mărgineşte domeniul în cel mult două puncte.*

Să considerăm că domeniul D este regulat în raport cu axa Oy (fig 8.4.1). Un astfel de domeniu se descrie astfel:

$$D = \{(x,y)|\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Fig. 8.4.1

Teorema 8.4.9 *Dacă funcţia f este definită şi integrabilă pe domeniul $D = \{(x,y) |\ a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ şi pentru fiecare $x \in [a,b]$ există integrala*

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy,$$

atunci are loc formula

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Demonstraţie Folosim Teorema 8.4.8. Considerăm dreptele paralele cu Ox, $y = c$ şi $y = d$, astfel ca $c \leq \varphi(x)$ şi $d \geq \psi(x)$, $x \in [a,b]$ (Fig. 8.4.1) şi notăm cu Δ dreptunghiul $[a,b] \times [c,d]$. Introducem funcţia auxiliară

$$g : \Delta \to \mathbb{R}\ , \quad g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,\text{dacă } (x,y) \in D \\ 0 & ,\text{dacă } (x,y) \in \Delta - D. \end{cases}$$

Funcţia g este integrabilă pe dreptunghiul Δ fiind integrabilă atât pe D, cât şi pe domeniul $\Delta - D$, unde este nulă.

Folosind proprietatea de aditivitate a integralei duble faţă de domeniu (Teorema 8.4.2), putem scrie

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy = \\ &\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Delta - D} g(x,y)dxdy = \\ &= \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy, \end{aligned} \tag{8.4}$$

deoarece $\iint\limits_{\Delta - D} g(x,y)dxdy = 0.$

Dar, integrala $\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy$ se poate calcula folosind şi formula din Teorema 8.4.8. Avem

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} g(x,y)dxdy = \\ &= \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} g(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} dx \left(\int\limits_{c}^{\varphi(x)} g(x,y)dy + \right. \\ &\left. + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x,y) + \int\limits_{\psi(x)}^{d} g(x,y)dy \right) = \\ &= \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \end{aligned} \tag{8.5}$$

deoarece

$$\int_{c}^{\varphi(x)} g(x,y)dy = 0 \quad \text{şi} \quad \int_{\psi(x)}^{d} g(x,y)dy = 0.$$

Din (8.4) şi (8.5) rezultă formula din enunţul Teoremei 8.4.9.

Dacă domeniul D este regulat în raport cu axa Ox, adică el are forma $D = \{(x,y) \| \; c \le y \le d, \; \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$ atunci avem formula

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int_{c}^{d} dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx.$$

Exemplul 8.4.2. Să calculăm integrala dublă

$$I = \iint\limits_{D} (3x - y + 2)dxdy$$

dacă D este domeniul mărginit de curbele $y = x$ şi $y = x^2$.

Examinăm domeniul D (Fig. 8.4.2) şi observăm că el este situat între dreapta $y = x$ şi parabola $y = x^2$ şi punctele $O(\circ, \circ)$ şi $A(1,1)$.

Fig. 8.4.2

D este regulat în raport cu axa Oy şi avem

$$D = \{(x, y)|\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}.$$

Atunci putem scrie succesiv:

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (3x - y + 2)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(3xy - \frac{y^2}{2} + 2y\right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x^2 - \frac{x^2}{2} + 2x - 3x^3 + \frac{x^4}{2} - 2x^2\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{2} - 3x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x\right) dx = \frac{31}{60}.$$

Observaţia 8.4.1 *Dacă avem de calculat o integrală dublă pe un domeniu arbitrar, atunci încercăm să găsim o partiţie a sa în domenii regulate şi apoi aplicăm proprietatea de aditivitate faţă de domeniu.*

Ca şi în cazul integralelor Riemann, calculul unor integrale duble se poate face cu o schimbare de variabile.

Se demonstrează ([16], [22]) că are loc următoarea teoremă de schimbare de variabile:

Teorema 8.4.10 *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe D şi fie transformare $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ a domeniului $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ în domeniul D. Dacă funcţiile φ şi ψ au derivate* *parţiale de ordinul întâi continue pe domeniul* Δ*, iar determinantul funcţional (jacobianul transformării)*

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci are loc formula de schimbare de variabile în integrala dublă

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J|dudv.$$

O schimbare de variabile des utilizată este cea polară:

$$x = r\cos\theta\ , \qquad y = r\sin\theta,$$

prin care se trece de la coordonatele carteziene (x,y) la cele polare (r,θ).

Geometric (Fig. 8.4.3), dacă avem punctul $A(x,y)$ din planul xOy, atunci coordonatele polare ale lui A sunt date de distanţa de la origine la A, adică $r = \sqrt{x^2+y^2}$, şi de unghiul pe care îl face axa Ox cu direcţia OA, adică $\mathrm{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$.

Fig. 8.4.3

Jacobianul transformării polare este

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Exemplul 8.4.3. Să calculăm integrala dublă

$$I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}|\ x^2+y^2 \le a^2,\ a > 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

Se observă că D este mărginit de sfertul de cerc $x^2+y^2 = r^2$ din primul cadran şi de axele Ox şi Oy (Fig. 8.4.4).

Fig. 8.4.4

Utilizăm coordonatele polare, prin care domeniul D este transformat în dreptunghiul

$$\Delta = \left\{(r,\theta)|\ 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\},$$

şi avem

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} r dr d\theta = \int\limits_0^a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1+r^2}} = \\
&= \int\limits_0^a \frac{r dr}{\sqrt{1+r^2}} dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+r^2}\Big|_0^a = \\
&= \frac{\pi}{2}(\sqrt{1+a^2}-1).
\end{aligned}$$

Observaţia 8.4.2 *Prin analogie cu integralele improprii din funcţiile de o variabilă reală, se pot introduce şi integrale duble (în general, multiple) improprii.*

Observaţia 8.4.3 *În domeniul economic integralele duble apar deseori în studiul modelelor matematico - economice descrise prin variabile aleatoare bidimensionale.*

8.5 Probleme

1. Prin calculul direct, stabiliţi natura următoarelor integrale improprii;

a) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \sin x dx;$

b) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+9};$

c) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\text{arctg} x}{1+x^2} dx;$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{9+x^2}$;

e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$;

f) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^n e^{-x}dx, \quad n \in \mathbb{N}$;

g) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

h) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

i) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$;

j) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\ln^2 x dx$;

k) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$;

l) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$.

2. Precizaţi natura următoarelor integrale improprii:

a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^{10}}$;

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{4+x^3}}$;

c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{3+x^2}}{\sqrt{x^2-2}}dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx dx, \quad a,b\in\mathbb{R}, \quad a>0$;

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx dx, \quad a,b\in\mathbb{R}, \quad a>0$;

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2x^2+3}dx$;

g) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}$;

i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$;

j) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$;

k) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\mathrm{tg}x-x}$.

3. Aflaţi v. p. C pentru integralele:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx;$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx;$

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x\ln x};$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1-x^2};$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}.$

4. Aflaţi:

a) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int_{1}^{2} (3x+1)\cos(\alpha x)dx;$

b) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int_{0}^{1} \sqrt[5]{x^6+x^2+\alpha^2}dx.$

5. Aflaţi derivatele $I'(\alpha)$ pentru următoarele funcţii:

a) $\displaystyle I(\alpha)=\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+\alpha^2}, \quad \alpha\in\mathbb{R};$

b) $\displaystyle I(\alpha)=\int_{\alpha^2}^{\alpha} \cos(x^2+\alpha^2)dx, \quad x\in\mathbb{R};$

c) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}dx, \quad \alpha > 0.$

6. Calculaţi integralele cu parametrii:

a) $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{1-e^{2\alpha}}{xe^x}dx, \quad \alpha > -1;$

b) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + \alpha^2 \sin^2 x)dx, \quad \alpha > 0;$

c) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad |\alpha| < 1.$

7. Calculaţi $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}dx$, $\alpha > 0$. Plecând de la rezultatul găsit, arătaţi că

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}x^n dx = n! \ , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

8. Plecând de la $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+a}$, $a > 0$, găsiţi

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} \ , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

9. Arătaţi că funcţia Γ este o funcţie convexă.

10. Utilizând integralele euleriene, calculaţi integralele:

a) $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$;

b) $\int\limits_a^0 x^2\sqrt{a^2-x^2}dx,\ a>0$;

c) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x^2)^2}dx$;

d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^4}$;

e) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}dx$;

f) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^6)^2}$;

g) $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}dx$;

h) $\int\limits_1^2 (x-1)^8(2-x)^{10}dx$;

i) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n},\ n\in\mathbb{N}$;

j) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^2 x dx$;

k) $\int\limits_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx,\ n \in \mathbb{N}.$

11. Calculaţi integralele duble:

a) $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{1}^{2} \dfrac{dx}{(3x+y+1)^2};$

b) $\int\limits_{1}^{2} \int\limits_{-1}^{1} (2x^2y - 3xy + 2x - 3y + 1)dxdy;$

c) $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{1}^{2} e^{x+y} dxdy;$

d) $\iint\limits_{D} xydxdy$ dacă

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0\ ,\quad y \geq 0\ ,\quad x + y \leq 1\};$$

e) $\iint\limits_{D} xydxdy$, unde D este interiorul triunghiului de vârfuri $(0,0)$, $(0,1)$ şi $(1,1)$;

f) $\iint\limits_{D} (2x-y)dxdy$, unde D este domeniul mărginit de curbele $y = 2 - x^2$ şi $y = 2x - 1$;

g) $\iint\limits_{D} y \ln x dxdy$, dacă D este domeniul mărginit de curbele $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$;

h) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, dacă D este domeniul mărginit de cercul $x^2+y^2=a^2$, $a>0$;

i) $\displaystyle\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy$, dacă D este domeniul mărginit de cercurile $x^2+y^2=e^2$ şi $x^2+y^2=e^4$;

j) $\displaystyle\iint_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy$, dacă D este domeniul mărginit de dreptele $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$ şi $x-y=-1$.

12. Calculaţi aria domeniului D limitat de curbele $xy=1$, $xy=2$, $y=x$ şi $y=3x$.

13. Calculaţi aria domeniului plan D limitat la curbele $x=4y-y^2$ şi $x+y=6$.

14. Calculaţi aria domeniului plan limitat de curbele $y=2-x$ şi $y^2=4x+4$.

15. Calculaţi volumul corpului limitat de suprafeţele $y=1+x^2$, $z=3x$, $y=5$ şi $z=0$ şi situat în primul octant.

16. Calculaţi volumul corpului limitat de suprafeţele $z=0$, $z=xy$, $x^2+y^2=4$.

8.6 Test de verificare a cunoştinţelor nr. 8

1. Definiţi următoarele noţiuni:

   a) Integrală improprie de prima speţă;

   b) Funcţiile Beta şi Gamma ale lui Euler;

   c) Integrală dublă.

2. a) Studiaţi convergenţa integralei $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$,

   b) Studiaţi convergenţa integralei $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$,

   c) Studiaţi convergenţa integralei $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$,

   d) Studiaţi convergenţa integralei

$$I = \int\limits_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^w} dx \ , \quad w > 1.$$

3. Să se calculeze integrala $I(a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{x \cdot e^x} dx$ care depinde de parametrul real $a > -1$.

4. Calculaţi integrala

$$I(b) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \ln \frac{1+b\sin x}{1-b\sin x} dx \text{ cu } b \in \mathbb{R}.$$

5. a) Calculaţi integrala:

$$I(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx$$

care depinde de parametrul real $0 < b < \infty$.

b) Calculaţi $I(y,k) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos yx}{x} \cdot e^{-kx} dx$ cu $y \geq 0$, $k > 0$.

6. Calculaţi cu ajutorul integralelor euleriene:

a) $I = \int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx$;

b) $I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2} dx$;

c) $I = \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$;

d) $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^2}$.

7. Calculaţi:

a) $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, unde D este dreptunghiul $[3,4] \times [1,2]$;

b) $I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

c) $I = \int_0^1 \int_{-1}^0 x\ e^{xy} dxdy.$

8. a) Calculaţi $I = \iint_D (x^2 + y)dxdy$ unde D este domeniul mărginit de parabolele $y = x^2$ şi $y^2 = x$.

b) Calculaţi $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$ unde D este mărginit de dreptele $x = 2$, $y = x$ şi hiperbola $xy = 1$.

9. Calculaţi $I = \iint_D xydxdy$, unde D este sfertul de cerc $x^2 + y^2 \leq R^2$ situat în primul cadran.

10. Calculaţi $I = \iint_D \frac{x^2 \sin(xy)}{y} dxdy$, unde D este domeniul mărginit de parabolele $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = \frac{\pi}{2}x$, $y^2 = \pi x$.

Capitolul 9

Indicaţii şi răspunsuri

Testul nr. 1

3. Se impune $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ şi se găseşte n_ε astfel încât (a_n) să fie şir Cauchy.

4. $z_n \to a + i \cdot \dfrac{1}{p+1}$.

5. $u_n \to \left(0, \ln 2, \dfrac{1}{\sqrt[9]{9}}\right)$.

6. $u_n \to \left(1, \sqrt{ab}, \dfrac{1}{e}\right)$.

7. $u_n \to \left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, e\right)$.

8. Se foloseşte faptul că suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice $a_1, a_n, ..., a_n, ...$ cu raţia r este $S_n = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)r]}{2}$.

9. Pentru $a < 1$ avem $\overline{\lim}\, a_n = \dfrac{1}{a}$ şi $\underline{\lim}\, a_n = a$.

Pentru $a > 1$ avem $\overline{\lim}\, a_n = a$ şi $\underline{\lim}\, a_n = \dfrac{1}{a}$.

Pentru $a = 1$ avem $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

10. Se scrie ecuaţia sub forma $x = \dfrac{\sin x + 1}{10}$. Notăm $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{10}$. Se arată că $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{10} < 1$ deci f este o contracţie. Apoi folosind principiul contracţiei se găseşte soluţia aproximativă căutată $x^* = \dfrac{\sin\dfrac{1}{10} + 1}{10}$.

Testul nr. 2

3. $S = 1$.
4. $S = 4$.
5. a) Serie divergentă;
   b) Serie divergentă pentru $a > e$, respectiv convergentă pentru $a < e$;
   c) Serie convergentă.
6. a) Pentru $a < 1$ seria converge. Pentru $a \geq 1$ seria diverge;
   b) Serie convergentă;
   c) Serie convergentă;
   d) Serie convergentă.
7. Pentru $\lambda > 1$ seria converge. Pentru $\lambda \leq 1$ seria diverge.
8. a) Pentru $a \leq -2$ seria diverge. Pentru $a > -2$ seria converge;

b) Se compară cu seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ care converge, deci şi seria dată converge.

c) La (i) seria diverge iar la (ii) seria converge.

9. a) Serie semiconvergentă;

   b) Serie absolut convergentă, deci şi convergentă.

10. a) Serie absolut convergentă, deci şi convergentă;

    b) Serie convergentă.

Testul nr. 3

2. Se foloseşte definiţia cu şiruri.

3. $L = 2$.

4. a) f continuă pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   b) Se foloseşte consecinţa lui Darboux: Dacă

$$f : [a, b] \to [a, b]$$

   continuă pe $[a, b]$ şi $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ atunci $(\exists)c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$.

5. b) Se consideră şirurile $\left(\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right)$ şi $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

6. Se consideră şirurile $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$ şi $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n}\right)$.

7. a) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = 1$ şi $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = -1$, deci nu există limita globală în $(0, 0)$.

b) Avem $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ dar nu există $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$. Avem limita globală

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

8. a) $L = 2$;
   b) $L = 2$.

9. f este uniform continuă pe $(1,\infty)$. Se foloseşte identitatea: $\text{arctg}\ \alpha - \text{arctg}\ \beta = \text{arctg}\ \dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$ şi inegalitatea $\text{arctg}\ x \leq x$.

10. f este uniform continuă pe $(1,2)\times(1,2)$.

Test nr. 4

3. a) f este derivabilă pe $\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$, iar $(-2,0)$ este punct de inflexiune şi $(1,0)$ este punct de întoarcere.
   b) f este derivabilă în $x = 0$, iar $(0,0)$ este punct unghiular.

4. Se consideră funcţia $g : [1, e^2] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{a_0 \ln x}{1} + \frac{a_1 \ln^2 x}{2} + ... + \frac{a_n \ln^{n+1} x}{n+1}$$

   şi se aplică teorema lui Rolle.

5. b) Se calculează $g'(x)$ şi se foloseşte punctul (a).

6. Se aplică teorema lui Cauchy funcţiilor $f, g : [0,x] \to \mathbb{R}$, cu $x > 0$, $f(t) = (1+t)\ln(1+t)$, $g(t) = \text{arctg}\ (t)$.

7. a) $(-1,0)$ şi $(1,0)$ sunt puncte de minim local, iar $(0,1)$ este punct de maxim local;

   b) $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ \ (\forall) n \in \mathbb{N}.$

   c) $h^{(20)}(x) = \left(6 \cdot \mathsf{C}_{20}^{3} - 3x^2 \cdot \mathsf{C}_{20}^{1}\right) \cdot \cos x + \left(x^3 - 6x \cdot \mathsf{C}_{20}^{20}\right) \cdot \sin x.$

8. Se aplică formula lui Mac Laurin şi se obţine:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$+(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+2}} \text{ cu } \theta \in (0,1).$$

9. Se aplică formula lui Taylor cu $x_0 = -1$ şi se obţine:

$$e^x = \frac{1}{e} \cdot \left[1 + \frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} + ... + \frac{(x+1)^n}{n!}\right] +$$

$$+\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{-1+\theta(x+1)}.$$

10. Se impune ca restul formulei lui Mac Laurin să aibă valoarea absolută mai mică sau egală cu $\frac{1}{16}$ şi se obţine $n \geq 2$.

Testul nr. 5

2. b) $\int\limits_0^2 f(x)dx = \frac{\pi}{4} + 2\ln 2 - 1.$

3. a) Se consideră funcţia

$$f : [0, e] \to \mathbb{R}\ , \quad f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x},$$

se arată că este crescătoare şi apoi se foloseşte: Dacă f este integrabilă pe $[a,b]$ şi $f \geq 0$ atunci $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) Se consideră funcţia

$$f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}\ , \quad f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}$$

şi se foloseşte teorema de medie: Dacă f este continuă pe $[a,b]$ atunci $(\exists)\xi \in (a,b)$ astfel încât $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$.

4. a) f se scrie $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in [0,\alpha] \\ -\ln x & , x \in (\alpha, 1] \end{cases}$ cu $\alpha \in (0,1)$ astfel încât $\alpha^2 + \ln\alpha = 0$ şi se arată că este continuă.

Apoi $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1 - \alpha - \dfrac{2\alpha^3}{3}$;

b) Se foloseşte substituţia $x = -t$ şi se obţine $I = \dfrac{32}{5}$.

c) $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + \sin x}{\sin x \cdot (1 + \cos x)} dx = +\infty$;

d) $l = \dfrac{15}{2} + \dfrac{1}{2}\ln 2$ şi $A = \dfrac{135}{2}\pi - 8\pi\ln 2 - \dfrac{\pi}{4}\ln^2 2$.

5. a) $A = \int\limits_0^1 [x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)]dx = \dfrac{3}{2} - \ln 2 - \dfrac{\pi}{4}$;

b) $\max\{1, \ln(1+x^2)\} = \begin{cases} 1 & , x < \sqrt{e-1} \\ \ln(1+x^2) & , x \geq \sqrt{e-1} \end{cases}$

şi $\int\limits_0^2 \max\{1, \ln(1+x^2)\}dx = 2\ln 5 - 4 +$

$+2\text{arctg } 2 + 2\sqrt{e-1} - 2\text{arctg } (\sqrt{e-1})$;

c) $I = -\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$

Apoi folosind faptul că funcţia $f(x) = x\text{tg}^2\, x$ este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ şi verifică $f(x) \leq x$ se obţine $8\ln 2 \geq \pi(4-\pi)$.

d) Din ipoteză se deduce $(f(x)-a)(f(x)-b) < 0$, iar de aici se deduce imediat rezultatul dorit.

6. a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\ln 2$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x}}dx = 2 - \sqrt{2}.$

7. a) $I = \text{arctg } \frac{\sqrt{e^x - 1}}{2} - \mathcal{C}$;

b) $I = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + \mathcal{C}$;

c) $I = \frac{1}{ab}\text{arctg } \left(\frac{b}{a}\text{tg } x\right) + \mathcal{C}.$

8. a) $I = -\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2-1} + \mathcal{C}$;

b) $I = \frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\ln|2x - 1 +$

$+2\sqrt{x^2-x+1}| + \mathcal{C}$;

c) $I = 2\sqrt[8]{\left(x^{\frac{4}{3}} - 1\right)^3} + \mathcal{C}$;

d) $I = -\ln \dfrac{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} + \mathcal{C}$.

9. $I = \sqrt{2} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

10. $A = \lim\limits_{a \to \infty} \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 4a^2\pi$.

Test nr. 6

2. a) (f_n) converge punctual dar nu şi uniform la funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & , x = 1 \\ 0 & , x \in [0,1) \end{cases}$;

   b) (f_n) converge uniform către

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}\ , \qquad f(x) = 0.$$

3. a) (f_n) converge uniform către funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.
   (f_n') converge simplu dar nu şi uniform către funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$;

   b) (f_n) converge simplu la $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

4. Seria este simplu convergentă dar nu şi uniform pe $\mathbb{R}$ şi $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x^2}{(1-x^2)^i} \to f(x)$ cu $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

5. a) $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{3}, \infty\right)$.

b) Se arată că seria modulelor este convergentă pe $\mathbb{R}$.

6. Domeniul de convergenţă este $(-1,1)$ iar suma seriei este $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

7. Mulţimea de convergenţă este $[-1,1]$ iar suma seriei este

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x} & ,x\in[-1,1)\setminus\{0\}\\ 0 & ,x=0\\ 1 & ,x=1.\end{cases}$$

8. $e^x=\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{x^n}{n!}$, pentru $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

9. $\sin x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-1)^n\cdot\left[-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$.

Test nr. 7

2. a) $(-1,-1)$ este punct de maxim cu $f(-1,-1)=1$.
   b) $(0,0)$ este punct de minim.

3. $(2,-2)$ este punct de minim cu $f(2,-2)=-37$; $(-2,2)$ este punct de minim cu $f(-2,2)=-37$.

4. Nu are nici un punct de extrem local.

5. $x=20$, $y=20$ cu profilul $f(20,20)=2782$.

6. $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ punct de minim condiţionat cu $f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 1$, iar $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ punct de maxim condiţionat cu $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 11$.

7. $(1, 1, 1)$ este punct de minim condiţionat cu $f(1, 1, 1) = 3$.

8. Pentru $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ şi $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$ se obţine dreptunghiul de arie maximă ($A \max = 2ab$).

9. $\left(-1, -\frac{5}{2}, 3, -\frac{3}{2}\right)$ este punct de minim condiţionat cu $f\left(-1, -\frac{5}{2}, 3, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{25}{2}$.

10. $(24, 120)$ este punct de maxim condiţionat iar producţia maximă este $24^{0,3} \cdot 120^{0,5}$.

Test nr. 8

2. a) integrala este convergentă.

   b) Din $\lim\limits_{x\to\infty} x^w \cdot \frac{1}{1+x^4} = 1$ pentru $w = 4 > 1$ se deduce convergenţa integralei.

   c) Din $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left[(1-x)^w \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}\right] \xlongequal{w = \frac{1}{3} < 1} 2^{-\frac{2}{3}}$ se deduce convergenţa integralei.

d) Folosind $\dfrac{|\sin x|}{x^w} \leq \dfrac{1}{x^w}$ şi $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^w}$ converge pentru $w>1$ se deduce convergenţa integralei.

3. $I(a) = \ln(a+1)$.

4. $I(b) = \pi \cdot \arcsin\,(b)$.

5. a) $I(b) = \pi \ln\left(\dfrac{b+1}{2}\right)$.

b) $I(y,k) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \dfrac{y^2}{\pi^2}\right)$.

6. a) $I = \beta\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\pi}{8}$.

b) $I = \beta\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

c) $I = \dfrac{1}{3}\beta\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

d) $I = \dfrac{1}{4}\beta\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{16}$.

7. a) $I = \displaystyle\int_1^2 dx \int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \ln\frac{25}{24}$.

b) $I = \displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{ydx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \ln\left[\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right]$.

8. a) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)dy\right) dx = \frac{33}{100}$.

b) $I = \int\limits_{1}^{2} \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx = \frac{9}{4}.$

9. Folosind coordonatele polare se obţine:

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{R} \rho^3 \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot d\rho d\theta = \frac{R^4}{8}.$$

10. $I = \dfrac{1}{3} \int\limits_{1}^{2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u \cdot \sin(uv) \cdot du dv = -\dfrac{2}{3\pi}$ unde $x^2 = u \cdot y$ cu $1 \le u \le 2$ şi $y^2 = vx$ cu $\dfrac{\pi}{2} \le v \le \pi$.

Bibliografie

[1] Acu, D., Dicu, P., Acu. M., Acu, A.-M., *Matematici aplicate în economie*, Vol.I, Editura Universităţii "Lucian Blaga" din Sibiu, 2001.

[2] Allen, R.G.D., *Analiză matematică pentru economişti*, Editura Ştiinţifică (traducere), Bucureşti, 1971.

[3] Apostol, T.M., *Mathematical Analysis (second edition)*, Addison–Wesley Publishing Company, 1974.

[4] Aramă, L., Morozan, I., *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.

[5] Blaga, P., Mureşan, A., *Matematici aplicate în economie*, Vol.I, Transilvania Press, Cluj–Napoca, 1996.

[6] Blaga, P., Mureşan, A., Lupaş, Al., *Matematici aplicate*, Vol.I, Editura Promedia Plus, Cluj–Napoca, 1999.

[7] Browder, A., *Mathematical Analysis. An Introduction*, Springer, 1996.

[8] Cobzaş, Ş., *Analiză matematică (Calcul diferenţial)*, Editura Presa Universitară Clujeană, Cluj–Napoca, 1997.

[9] Donciu, N., Flondor, D., *Algebră şi analiză matematică. Culegere de probleme*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[10] Dowling, E.T., *Mathématiques pour l'économie*, McGraw–Hill, Paris, 1990.

[11] Gheorghiu, N., Precupeanu, T., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[12] Izvercian, P.N., Niţoiu, R., Izvercian, N., *Analiză matematică. Aplicaţii în tehnică şi economie*, Editura de Vest, Timişoara, 1994.

[13] Krasnov, M., Kiselev, A., Makarenko, G., Shikin, E., *Mathematical Analysis for Engineers*, Vol.I, II, Mir Publishers, Moscow, 1990.

[14] Lancaster, K., *Analiză economică matematică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1973.

[15] Meghea, C., *Bazele analizei matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977.

[16] Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S., *Manual de analiză matematică*, Vol.I, 1962, Vol.II, 1964, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

[17] Olaru, V., Halanay, A., Turbatu, S., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[18] Popa, C., Hiriş, V., Megan, M., *Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme, Editura Facla, Timişoara, 1976.*

[19] Popescu, O., Raischi, C., *Matematici aplicate în economie*, Vol.I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.

[20] Precupeanu, A., *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

[21] Sireţchi, Gh., *Calcul diferenţial şi integral*, Vol.I, II, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[22] Stănăşilă, O., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucreşti, 1981.

[23] Vasiliu, D.P., *Matematici economice*, Editura Eficient, Bucureşti, 1996.